§4. ტოპოლოგიური სივრცე – ნაწილი პირველი (ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ბაზისი, წერტილის მიდამო, ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები, სიმრავლის ჩაკეტვა, სიმრავლის ინტერიერი).

4.0. შესავალი.

მომდევნო პარაგრაფებში მოცემული იქნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგის – ტოპოლოგიის (*ბერძნ.* topos – ადგილი, logos – სწავლა) – ზოგიერთი ძირითადი საწყისი ცნება და დებულება. მათემატიკური ანალიზისა და გეომეტრიის წიაღში წარმოშობილი ეს დარგი, როგორც დამოუკიდებელი შესწავლის საგანი, მე-20 საუკუნის დასაწყისში ჩამოყალიბდა. ამ სფეროს უკავშირდება მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური კონცეპციები, როგორიცაა კრებადობა, უწყვეტობა, კომპაქტურობა, ბმულობა და სხვა. დარგის სათავეებთან იდგნენ გეორგ კანტორი[1], ანრი პუანკარე[2], მორის ფრეშე[3], ფელიქს ჰაუსდორფი[4], კაზიმიეჟ კურატოვსკი[5], ლუიცენ ბრაუერი[6], პაველ ალექსანდროვი[7] და სხვა გამოჩენილი მათემატიკოსები. ქართული ტოპოლოგიური სკოლის ფუძემდებელია აკადემიკოსი გიორგი ჭოღოშვილი[8].

ვიდრე გადავიდოდეთ ზუსტ ფორმალურ განმარტებებზე, აღვნიშნავთ, რომ ტოპოლოგიური სივრცე ეს არის სიმრავლე, რომელშიც „გამოყოფილია" ზოგი ქვესიმრავლე (რომლებსაც პირობითად ჰქვია ღია სიმრავლეები) ისე, რომ დაცული უნდა იყოს შემდეგი პირობები: ცარიელი სიმრავლე და მთელი სიმრავლე ცხადდება ღია სიმრავლეებად, ნებისმიერი (სასრული თუ უსასრულო) „რაოდენობის" ღია სიმრავლეთა გაერთიანება ღიაა და, ბოლოს, სასრული რაოდენობის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა ღიაა.

ახლა გადავდივართ ზუსტ განმარტებებზე.

4.1. ტოპოლოგიური სტრუქტურა მოცემულ სიმრავლეზე. ტოპოლოგიური სივრცე.

ვთქვათ, X ნებისმიერი სიმრავლეა. როგორც უკვე ითქვა (იხ. 1.4), $\mathcal{P}(X)$-ით აღინიშნება ამ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. განვიხილოთ $\mathcal{P}(X)$-ის რაიმე τ ქვესიმრავლე (ამრიგად, τ-ს თითოეული ელემენტი X სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა (თუმცა, X სიმრავლეს შეიძლება გააჩნდეს ისეთი ქვესიმრავლეები, რომლებიც არ წარმოადგენენ τ-ს ელემენტებს).

4.1.1. განმარტება. τ-ს ეწოდება **ტოპოლოგიური სტრუქტურა** (ან, უბრალოდ, **ტოპოლოგია**) X სიმრავლეზე, თუ შესრულებულია შემდეგი ოთხი პირობა:

(O_1) $\varnothing \in \tau$.

(O_2) $X \in \tau$.

---

[1] გერმანელი მათემატიკოსი (1845 – 1918).
[2] დიდი ფრანგი მათემატიკოსი (1854 -1912).
[3] ფრანგი მათემატიკოსი (1878 – 1973).
[4] გერმანელი მათემატიკოსი (1868 – 1942).
[5] პოლონელი მათემატიკოსი (1896 – 1980).
[6] ჰოლანდიელი მათემატიკოსი (1881 – 1966).
[7] რუსი მათემატიკოსი (1896 – 1982).
[8] ქართველი მათემატიკოსი (1914 -1998).

(O_3) თუ $\{O_i\}_{i\in I}$ არის X -ის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი სისტემა, რომლის ყოველი წევრი ეკუთვნის τ -ს, მაშინ $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

(O_4) თუ $\{O_i\}_{i=1}^{n}$ არის X -ის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი სასრული სისტემა, რომლის თითოეული წევრი ეკუთვნის τ -ს, მაშინ $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$.

შევნიშნოთ, რომ (O_4) პირობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X -ის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი 2-ელემენტიანი სისტემის თანაკვეთა, რომლის თითოეული წევრი ეკუთვნის τ -ს, ასევე ეკუთვნის τ -ს.

τ -ს ელემენტებს, პირობითად, (მოცემულ ტოპოლოგიაში) X -ის **ღია ქვესიმრავლეები** ვუწოდოთ (ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ტოპოლოგია X -ზე შემოტანილია ღია სიმრავლეების საშუალებით).

მაშინ, ზემოთ მოყვანილი ოთხი პირობა ასე ჩამოყალიბდება:

$\varnothing$ სიმრავლე ღიაა; X სიმრავლე (როგორც თავისთავის ქვესიმრავლე) ღიაა; ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი გაერთიანება ღიაა; სასრული რაოდენობის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა ღიაა (მარტივად მოწმდება, რომ (O_4) პირობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ორი ღია სიმრავლის თანაკვეთა ღიაა).

4.1.2. განმარტება. წყვილს (X,τ) სადაც X – რაიმე სიმრავლეა, ხოლო τ – რაიმე ტოპოლოგიური სტრუქტურაა ამ სიმრავლეზე, **ტოპოლოგიური სივრცე** (ან, უბრალოდ, სივრცე) ეწოდება.

თუ (X,τ) – ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ X სიმრავლის ელემენტებს (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის წერტილებს უწოდებენ.

ერთსა და იმავე სიმრავლეზე შეიძლება განვიხილოთ სხვადასხვა ტოპოლოგიური სტრუქტურები. თუმცა, როცა კონტექსტიდან გასაგებია, თუ რომელ τ ტოპოლოგიურ სტრუქტურაზეა ლაპარაკი მოცემულ X სიმრავლეზე, შესაბამის ტოპოლოგიურ სივრცეს, ნაცვლად (X,τ)-სა, აღინიშნავენ მარტივად, მხოლოდ X ასოთი (და ამბობენ, რომ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, ან, უბრალოდ, X არის სივრცე).

თუ O არის X სივრცის ღია ქვესიმრავლე, ამბობენ, რომ O ღიაა X -ში.

4.1.3. ტოპოლოგიათა შედარება. ვთქვათ, X სიმრავლეზე მოცემულია ორი ტოპოლოგია τ_1 და τ_2. ამბობენ, რომ τ_1 ტოპოლოგია უფრო **სუსტია** ვიდრე τ_2 (ხოლო τ_2 ტოპოლოგია უფრო **ძლიერია** ვიდრე τ_1) და წერენ $\tau_1 \le \tau_2$ (ან $\tau_2 \ge \tau_1$) თუ $\tau_1 \subset \tau_2$. ამ შემთხვევაში ზოგჯერ ამბობენ, რომ τ_1 ნაკლებია ან ტოლია τ_2 -ზე (ან, რომ τ_2 მეტია ან ტოლია τ_1-ზე). ცხადია, მოცემულ სიმრავლეზე ანტიდისკრეტული ტოპოლოგია ამავე სიმრავლეზე ყოველ ტოპოლოგიაზე სუსტია, დისკრეტული ტოპოლოგია კი ყველაზე ძლიერია. აქვე შევნიშნავთ, რომ მოცემულ სიმრავლეზე ორი τ_1 და τ_2 ტოპოლოგია შესაძლებელია არს იყოს ერთმანეთის სადარი, ანუ, $\tau_1 \le \tau_2$ და $\tau_2 \le \tau_1$ თანაფარდობებიდან არცერთი არ სრულდებოდეს.

4.2. მაგალითები.

4.2.1. ვთქვათ, X რაიმე სიმრავლეა და ვთქვათ $\tau = \mathcal{P}(X)$. მარტივად მოწმდება, რომ τ არის ტოპოლოგია X-ზე. ამ ტოპოლოგიას **დისკრეტულს**, ხოლო შესაბამის ტოპოლოგიურ სივრცეს დისკრეტულ ტოპოლოგიურ სივრცეს უწოდებენ. ამრიგად, დისკრეტულ ტოპოლოგიაში X-ის ყოველი ქვესიმრავლე ღიაა.

4.2.2. ვთქვათ, X რაიმე სიმრავლეა და ვთქვათ $\tau = \{\varnothing, X\}$. მარტივად მოწმდება, რომ τ არის ტოპოლოგია X-ზე. ამ ტოპოლოგიას **ანტიდისკრეტულს**, ხოლო შესაბამის ტოპოლოგიურ სივრცეს ანტიდისკრეტულ ტოპოლოგიურ სივრცეს უწოდებენ. ამრიგად, ანიდისკრეტულ ტოპოლოგიაში ღიაა X-ის მხოლოდ ცარიელი ქვესიმრავლე და თვითონ X.

4.2.3. განვიხილოთ 2-ელემენტიანი სიმრავლე: $X = \{a, b\}$. ვთქვათ, $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$. შეამოწმეთ, რომ τ გარკვეული ტოპოლოგიაა X-ზე.

4.3. ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი.

4.3.1. განმარტება. ვთქვათ, (X, τ) – ტოპოლოგიური სივრცეა და ვთქვათ, $\mathcal{B} \subset \tau$. $\mathcal{B}$-ს ეწოდება X ტოპოლოგიური სივრცის (ან τ ტოპოლოგიის) **ბაზისი** (ან, ბაზა) თუ X-ის ნებისმიერი არაცარიელი ღია ქვესიმრავლე წარმოიდგინება $\mathcal{B}$-ში შემავალი სიმრავლეების გაერთიანების სახით. უფრო ზუსტად, $\mathcal{B}$-ს ეწოდება X ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი თუ ნებისმიერი $O \in \tau$-სათვის, სადაც $O \neq \varnothing$, არსებობს X-ის ქვესიმრავლეთა ისეთი $\{O_i\}_{i \in I}$ სისტემა, რომ ნებისმიერი $i \in I$-სათვის $O_i \in \mathcal{B}$ და $O = \bigcup_{i \in I} O_i$.

ცხადია, ყოველ (X, τ) ტოპოლოგიურ სივრცეს გააჩნია ერთი მაინც ბაზისი; ასეთია თვითონ τ და გარდა ამისა, ტოპოლოგიურ სივრცეს შეიძლება გააჩნდეს ბევრი სხვადასხვა ბაზისი. მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის ყველა შესაძლო ბაზისების სიმძლავრეებს შორის არსებობს უმცირესი.

4.3.2. განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცის ყველა შესაძლო ბაზისების სიმძლავრეებს შორის უმცირესს მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის **წონა** ეწოდება და აღინიშნება $\omega(X)$ სიმბოლოთი. იმ შემთხვევაში, როცა $\omega(X) \leq \aleph_0$, ამბობენ, რომ X – **თვლადბაზისიანი** სივრცეა.

ამ განმარტების მიხედვით, 4.2.2 და 4.2.3 მაგალითებში განხილული სივრცეები თვლადბაზისიანია. რაც შეეხება დისკრეტულ (X, τ) სივრცეს (იხ. 4.2.1), მისი წონა ემთხვევა X სიმრავლის სიმძლავრეს. ამიტომ დისკრეტული (X, τ) სივრცე თვლადბაზისიანია მხოლოდ მაშინ, როცა X სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

იმ შემთხვევაში, როცა სივრცე თვლადბაზისიანია, ამბობენ, რომ ეს სივრცე აკმაყოფილებს **თვლადობის მეორე აქსიომას**.

შემდეგი ორი თეორემა მოგვყავს დაუმტკიცებლად, რომლებიც სასურველია მკითხველმა დაამტკიცოს დამოუკიდებლად.

4.3.3. თეორემა. ნებისმიერი ტოპოლოგიური X სივრცის ყოველ $\mathcal{B}$ ბაზისს გააჩნია შემდეგი ორი თვისება:

$(B1)$ ნებისმიერი $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ -სათვის და ყოველი $x \in U_1 \bigcap U_2$ -სათვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{B}$, რომ $x \in U \subset U_1 \bigcap U_2$.

$(B2)$ ყოველი $x \in X$ -სათვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{B}$, რომ $x \in U$.

4.3.4. თეორემა (ტოპოლოგიის შემოტანა ბაზისის საშუალებით). ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X სიმრავლე (რომელზედაც ჯერ-ჯერობით არავითარი ტოპოლოგია არ გვაქვს) და ვთქვათ, $\mathcal{B}$ არის X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელსაც გააჩნია წინადადება 4.7.1-ში მოყვანილი ორივე $(B1)$ და $(B2)$ თვისება. X სიმრავლის O ქვესიმრავლეს დავარქვათ ღია, თუ ის ცარიელია, ან წარმოიდგინება $\mathcal{B}$ -ს გარკვეული ელემენტების გაერთიანების სახით. უფრო ზუსტად, O -ს დავარქვათ ღია, თუ $O = \varnothing$, ან არსებობს X -ის ქვესიმრავლეთა რაიმე ისეთი $\{U_i\}_{i \in I}$ სისტემა, რომ ნებისმიერი $i \in I$ -სათვის $U_i \in \mathcal{B}$ და $O = \bigcup_{i \in I} U_i$. X სიმრავლის ამ აზრით ყველა ღია სიმრავლეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ τ -თი. მაშინ τ არის გარკვეული ტოპოლოგია X -ზე, ხოლო $\mathcal{B}$ არის ამ ტოპოლოგიის ერთ-ერთი ბაზისი.

4.4. წერტილის მიდამო. მიდამოთა ბაზისი წერტილში.

4.4.1 განმარტება. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა და $x \in U \subset X$, სადაც U – ღია სიმრავლეა. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ U არის x წერტილის (ღია) **მიდამო**.

4.2.1 მაგალითში განხილული (დისკრეტული) სივრცის ყოველი წერტილისთვის ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი სიმრავლე მისი მიდამოა.

ანტიდისკრეტული X სივრცის (იხ. მაგალითი 4.2.2) ყოველ წერტილს გააჩნია ერთადერთი მიდამო – თვითონ X .

4.2.3 მაგალითში a წერტილს გააჩნია ორი მიდამო: $\{a\}$ და $\{a,b\}$, ხოლო b წერტილს მხოლოდ ერთი მიდამო: $\{a,b\}$.

4.4.2. წინადადება. $V \subset X$ სიმრავლე ღიაა X სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x \in V$ -სათვის არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \subset V$.

წინადადება 4.4.2 დაამტკიცეთ სავარჯიშოს სახით დამოუკიდებლად.

4.4.3. განმარტება. ვთქვათ, (X,τ) – ტოპოლოგიური სივრცეა და $x \in X$. τ_x -ით აღვნიშნოთ X სივრცის x წერტილის მომცველ ყველა ღია სიმრავლეთა (ანუ, x წერტილის ყველა მიდამოთა) სიმრავლე (ცხადია, $\tau_x \subset \tau$). τ_x -ის $\mathcal{B}(x)$ ქვესიმრავლეს ეწოდება X სივრცის **მიდამოთა ბაზისი** x **წერტილში**, თუ სრულდება შემდეგი პირობა: x წერტილის ყოველი V მიდამოსათვის არსებობს $U \in \mathcal{B}(x)$ ისეთი, რომ $U \subset V$.

ცხადია, ყოველი ტოპოლოგიური (X,τ) სივრცის ყოველი x წერტილისათვის არსებობს მიდამოთა ბაზისი ამ წერტილში; მაგალითად, ასეთია თვითონ τ_x . X სივრცის x წერტილში მიდამოთა ბაზისების სიმძლავრეებს შორის არსებობს უმცირესი.

4.4.4. განმარტება. X სივრცის x წერტილში მიდამოთა ბაზისების სიმძლავრეებს შორის უმცირესს x **წერტილში** X **სივრცის მახასიათებელი** ეწოდება და აღინიშნება $\chi(x, X)$ სიმბოლოთი.

ამბობენ, რომ X სივრცე აკმაყოფილებს **თვლადობის პირველ აქსიომას**, თუ ყოველი $x \in X$ -სათვის $\chi(x, X) \leq \aleph_0$.

4.4.5. თეორემა. ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და ყოველი $x \in X$ -სათვის დაფიქსირებულია მიდამოთა $\mathcal{B}(x)$ ბაზისი x წერტილში. მაშინ, ერთობლიობა $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

$(BP1)$ ყოველი $x \in X$ -სათვის $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$ და ნებისმიერი $U \in \mathcal{B}(x)$-სათვის $x \in U$.

$(BP2)$ ვთქვათ, $x, y \in X$ და დავუშვათ, $U \subset X$ ისეთია, რომ $x \in U \in \mathcal{B}(y)$. მაშინ არსებობს ისეთი $V \in \mathcal{B}(x)$, რომ $V \subset U$.

$(BP3)$ ნებისმიერი $x \in X$ -სათვის და ნებისმიერი $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$-სათვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{B}(x),$ რომ $U \subset U_1 \bigcap U_2$.

დამტკიცება.

$(BP1)$ რადგან X არის x წერტილის ერთ-ერთი მიდამო და რადგან $\mathcal{B}(x)$ მიდამოთა ბაზისია ამ წერტილში, არსებობს ერთი მაინც ისეთი $U \in \mathcal{B}(x)$, რომ $U \subset X$. ამრიგად, (რადგან $U \in \mathcal{B}(x)$), $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$. ის, რომ ყოველი $U \in \mathcal{B}(x)$-სათვის $x \in U$, გამომდინარეობს მიდამოს განმარტებიდან.

$(BP2)$ რადგან $U \in \mathcal{B}(y)$ ამიტომ U სიმრავლე ღიაა და რადგან $x \in U$, ამიტომ U არის x წერტილის მიდამო. მაშასადამე, იმის გამო, რომ $\mathcal{B}(x)$ არის მიდამოთა ბაზისი x წერტილში, არსებობს ისეთი $V \in \mathcal{B}(x)$, რომ $V \subset U$.

$(BP3)$ რადგან $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, როგორც U_1 , ისე U_2 – ღია სიმრავლეა; ამასთან, $x \in U_1$ და $x \in U_2$. მაშასადამე ((O_4) -ის თანახმად), $U_1 \bigcap U_2$ ღიაა და $x \in U_1 \bigcap U_2$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $U_1 \bigcap U_2$ არის x წერტილის მიდამო. ამიტომ, რადგან $\mathcal{B}(x)$ არის მიდამოთა ბაზისი x წერტილში, იარსებებს ისეთი $U \in \mathcal{B}(x)$, რომ $U \subset U_1 \bigcap U_2$.

თეორემა 4.4.5 დამტკიცებულია.

შემდეგი თეორემა მოგვყავს დაუმტკიცებლად (სავარჯიშოს სახით, მკითხველს შეუძლია ის დამოუკიდებლად დაამტკიცოს).

4.4.6. თეორემა (ტოპოლოგიის შემოტანა მიდამოთა საშუალებით). ვთქვათ მოცემულია რაიმე X სიმრავლე (რომელზედაც ჯერ-ჯერობით არავითარი ტოპოლოგია არ გვაქვს). დავუშვათ, ყოველი $x \in X$ -სათვის დაფიქსირებულია X -ის ქვესიმრავლეთა რაღაც $\mathcal{B}(x)$ სიმრავლე ისე, რომ შესრულებულია ზემოთ მოცემული სამი $(BP1),$ $(BP2)$ და $(BP3)$ პირობიდან თითოეული. X სიმრავლის O ქვესიმრავლეს დავარქვათ ღია, თუ ყოველი $x \in O$ -სათვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{B}(x)$, რომ $U \subset O$. X სიმრავლის ამ აზრით ყველა ღია სიმრავლეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ

τ-თი. მაშინ τ არის გარკვეული ტოპოლოგია X-ზე, ხოლო ყოველი $x \in X$-სათვის $\mathcal{B}(x)$ წარმოადგენს მიდამოთა ბაზისს x წერტილში.

4.5. ჩაკეტილი სიმრავლე.

4.5.1. განმარტება. (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის F ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჩაკეტილი** (X-ში, ან τ ტოპოლოგიაში), თუ მისი დამატება $X \setminus F$ ღიაა (X-ში). ანუ, F ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \setminus F \in \tau$.

ცხადია, ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლის დამატება ღიაა.

4.5.2. თეორემა. ვთქვათ, (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცეა. ამ სივრცის ყველა ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathcal{F}$ სიმბოლოთი. $\mathcal{F}$-ს გააჩნია (τ-ს თვისებათა დულალური) შემდეგი ოთხი თვისება:

$(C1)$ $X \in \tau$.

$(C2)$ $\varnothing \in \tau$.

$(C3)$ თუ $\{F_i\}_{i=1}^n$ არის X-ის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი სასრული სისტემა, რომლის თითოეული წევრი ეკუთვნის $\mathcal{F}$-ს, მაშინ $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$.

$(C4)$ თუ $\{F_i\}_{i\in I}$ არის X-ის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი სისტემა, რომლის ყოველი წევრი ეკუთვნის $\mathcal{F}$-ს, მაშინ $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

დამტკიცება. $(C1)$ და $(C2)$-ის სამართლიანობა ცხადია. $(C3)$ და $(C4)$ გამომდინარეობს დე მორგანის კანონებიდან (იხ. §3).

მარტივად მტკიცდება შემდეგი

4.5.3. თეორემა (ტოპოლოგიის შემოტანა ჩაკეტილ სიმრავლეთა საშუალებით). ვთქვათ მოცემულია რაიმე X სიმრავლე (რომელზედაც ჯერ-ჯერობით არავითარი ტოპოლოგია არ გვაქვს) და ვთქვათ, მოცემულია ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი $\mathcal{F}$ სიმრავლე, რომელსაც გააჩნია $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ და $(C4)$ თვისებები. X სიმრავლის O ქვესიმრავლეს დავარქვათ ღია, თუ მისი $X \setminus O$ დამატება ეკუთვნის $\mathcal{F}$-ს. X სიმრავლის ამ აზრით ყველა ღია სიმრავლეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ τ-თი. მაშინ τ არის გარკვეული ტოპოლოგია X-ზე. ამასთან, ამ ტოპოლოგიაში ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა სიმრავლე ემთხვევა $\mathcal{F}$-ს.

4.5.4. განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება **ღია-ჩაკეტილი**, თუ ეს ქვესიმრავლე ერთდროულად ღიაცაა და ჩაკეტილიც.

ყოველ ტოპოლოგიურ X სივრცეში ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$ და თვითონ X წარმოადგენენ X სივრცის ღია-ჩაკეტილ ქვესიმრავლეებს. თუმცა, შეიძლება არსებობდეს მათგან განსხვავებული სხვა ღია-ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებიც.

შევნიშნოთ, რომ დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე ღია-ჩაკეტილია.

4.6. სიმრავლის ჩაკეტვა.

4.6.1. განმარტება (სიმრავლის ჩაკეტვა; ჩაკეტვის ოპერატორი). ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და A მისი რაიმე ქვესიმრავლეა. $\mathcal{F}_A$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X-ში ყველა იმ ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი, რომელთაგან თითოეული მოიცავს A-ს. ცხადია, რომ $X \in \mathcal{F}_A$. ამრიგად, $\mathcal{F}_A \neq \varnothing$. C(4) თვისების თანახმად, $\bigcap \mathcal{F}_A$ ჩაკეტილია X-ში. ამასთან, ცხადია, რომ $A \subset \bigcap \mathcal{F}_A$. ამრიგად, $\bigcap \mathcal{F}_A$ წარმოადგენს X-ის „უმცირეს" ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, რომელიც მოიცავს A-ს. ამ ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის **ჩაკეტვა** X-ში და აღინიშნება $[A]_X$ ან (როცა გასაგებია რომელ ტოპოლოგიურ სივრცეში ჩაკეტვაზეა ლაპარაკი) $\overline{A}$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, ნებისმიერი ტოპოლოგიური X სივრცის ყოველ A ქვესიმრავლეს გარკვეული წესით (ცალსახად) შეესაბამება ამავე სივრცის ჩაკეტილი $\overline{A}$ ქვესიმრავლე. შესაბამისობის ამ წესს (X ტოპოლოგიური სივრცის) **ჩაკეტვის ოპერატორი** ეწოდება. მაშასადამე, X სივრცის ჩაკეტვის ოპერატორი წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი წესით განსაზღვრულ ასახვას $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლიდან $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლეში.

4.6.2. წინადადება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეა ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = \overline{A}$.

პირდაპირ გამომდინარეობს განმარტებებიდან. (შეამოწმეთ!)

4.6.3. წინადადება. ვთქვათ, A და B წარმოადგენენ X ტოპოლოგიური სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებია, რომ $A \subset B$. მაშინ $\overline{A} \subset \overline{B}$.

დამტკიცება. რადგან $A \subset B$, ცხადია, რომ $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$ და მაშასადამე, $\bigcap \mathcal{F}_A \subset \bigcap \mathcal{F}_B$. ამიტომ, $\overline{A} = \bigcap \mathcal{F}_A \subset \bigcap \mathcal{F}_B = \overline{B}$.

4.6.4. წინადადება. ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$. სამართლიანია შემდეგი: $x \in X$ წერტილი ეკუთვნის A სიმრავლის ჩაკეტვას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ x წერტილის ყოველი U მიდამოსათვის გვაქვს: $U \bigcap A \neq \varnothing$.

დამტკიცება.

(*აუცილებლობა*). დავუშვათ, $x \in \overline{A}$. საჩვენებელია, რომ x-ის ნებისმიერი მიდამო კვეთს A-ს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \bigcap A = \varnothing$. მაშინ, $X \setminus U \supset A$. ამრიგად, $X \setminus U$ წარმოადგენს X-ის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, რომელიც მოიცავს A-ს. ამასთან, ცხადია, რომ $x \notin X \setminus U$ და რადგან $\overline{A}$ წარმოადგენს A-ს მომცველ ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახის თანაკვეთას, ამიტომ x არ შეიძლება ეკუთვნოდეს $\overline{A}$-ს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

(*საკმარისობა*). დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $x \in X$ წერტილი ისეთია, რომ მისი ყოველი მიდამო კვეთს A-ს, მაგრამ $x \notin \overline{A}$. მაშინ უნდა არსებობდეს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე F, რომ $F \supset A$ და $x \notin F$. აღვნიშნოთ $U = X \setminus F$. ცხადია, რომ U ღიაა X-ში და $x \in U$. ასე, რომ U არის x წერტილის ერთ-ერთი მიდამო. მაგრამ, $U \bigcap F = (X \setminus F) \bigcap F = \varnothing$ და რადგან $F \supset A$, მით უმეტეს გვექნება: $U \bigcap A = \varnothing$. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას.

წინადადება დამტკიცებულია.

4.6.5. შედეგი. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა და $U, A \subset X$. თუ U ღია სიმრავლეა და $U \bigcap A = \varnothing$, მაშინ, $U \bigcap \bar{A} = \varnothing$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $U, A \subset X$, U ღიაა X-ში და $U \bigcap A = \varnothing$. დასამტკიცებელია, რომ $U \bigcap \bar{A} = \varnothing$. ამისათვის, კი, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $x \in U$, მაშინ $x \notin \bar{A}$. მართლაც, ვთქვათ $x \in U$. რადგან U ღიაა X-ში, U არის x-ის ერთ-ერთი მიდამო, რომელიც პირობის თანახმად, არ კვეთს A-ს. ამიტომ, 4,6,4-ის თანახმად, $x \notin \bar{A}$.

4.6.5 დამტკიცებულია.

4.6.6. თეორემა. ყოველი ტოპოლოგიური X სივრცის ჩაკეტვის ოპერატორს გააჩნია შემდეგი ოთხი თვისება:

$(CO1)$ $\bar{\varnothing} = \varnothing$.

$(CO2)$ ყოველი $A \subset X$-სათვის, $A \subset \bar{A}$.

$(CO3)$ ყოველი $A, B \subset X$-სათვის, $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$.

$(CO4)$ ყოველი $A \subset X$-სათვის, $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

დამტკიცება. $(CO1)$-სა და $(CO2)$-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს უშუალოდ ჩაკეტვის ოპერატორის განმარტებიდან. შემდეგ, რადგან $\bar{A}$ სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $(CO4)$-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს წინადადება 4.6.2-დან. ვაჩვენოთ $(CO3)$-ის სამართლიანობა.

მართლაც, ცხადია, რომ $A \subset A \bigcup B$ და $B \subset A \bigcup B$. ამიტომ (იხ. 4.16): $\bar{A} \subset \overline{A \bigcup B}$ და $\bar{B} \subset \overline{A \bigcup B}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\bar{A} \bigcup \bar{B} \subset \overline{A \bigcup B}. \qquad (1)$$

მეორე მხრივ, $(CO2)$-დან გვაქვს: $A \subset \bar{A}$ და $B \subset \bar{B}$. ე. ი. $A \bigcup B \subset \bar{A} \bigcup \bar{B}$. მაგრამ $\bar{A} \bigcup \bar{B}$, როგორც ორი ჩაკეტილი სიმრავლის გაერთიანება, ჩაკეტილია. ამრიგად, $\bar{A} \bigcup \bar{B}$ წარმოადგენს $A \bigcup B$ სიმრავლის მომცველ ერთ-ერთ ჩაკეტილ სიმრავლეს. რადგან $A \bigcup B$ სიმრავლის ჩაკეტვა $A \bigcup B$ სიმრავლის მომცველი „უმცირესი" ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ:

$$\overline{A \bigcup B} \subset \bar{A} \bigcup \bar{B}. \qquad (2)$$

(1) და (2)-დან გამომდინარეობს ტოლობა: $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$.

წინადადება დამტკიცებულია.

შემდეგ თეორემას გთავაზობთ დაუმტკიცებლად (სავარჯიშოს სახით, შესაძლებელია მისი დამოუკიდებლად დამტკიცება).

4.6.7. თეორემა. (ტოპოლოგიის შემოტანა ჩაკეტვის ოპერატორის საშუალებით). ვთქვათ, X – რაიმე სიმრავლეა და ვთქვათ $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ისეთი ასახვაა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ოთხ პირობას (იხ. $(CO1)$, $(CO2)$, $(CO3)$, $(CO4)$):

- $C(\varnothing) = \varnothing$.
- ყოველი $A \subset X$-სათვის, $A \subset C(A)$.
- ყოველი $A, B \subset X$-სათვის, $C(A \bigcup B) = C(A) \bigcup C(B)$.
- ყოველი $A \subset X$-სათვის, $C(C(A)) = C(A)$.

განვიხილოთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა შემდეგი τ ოჯახი:

$$\tau = \{O \subset X \mid \exists A \subset X : \ A = \bar{A} \text{ და } O = X \setminus A\}.$$

ამ პირობებში, τ ოჯახი წარმოადგენს გარკვეულ ტოპოლოგიას X სიმრავლეზე და ყოველი $A \subset X$-სათვის $C(A)$ წარმოადგენს A სიმრავლის ჩაკეტვას (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში.

4.7. სიმრავლის ინტერიერი.

4.7.1. განმარტება (სიმრავლის ინტერიერი; ინტერიერის აღების ოპერატორი). ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$ მისი რაიმე ქვესიმრავლეა.განვიხილოთ X-ის ყველა ისეთ ღია ქვესიმრავლეთა $\mathcal{U}_A$ ოჯახი, რომელთაგან თითოეული შედის A-ში. ამრიგად,

$$\mathcal{U}_A = \{U \mid U \text{ არის } X\text{-ის ღია ქვესიმრავლე და } U \subset A\}.$$

ცხადია, რომ ყოველი A-სათვის $\varnothing \in \mathcal{U}_A$; ასე, რომ $\mathcal{U}_A \neq \varnothing$.

სიმრავლეთა $\mathcal{U}_A$ ოჯახის გაერთიანებას აღნიშნავენ $IntA$ (ან $Int_X A$) სიმბოლოთი და მას A **სიმრავლის ინტერიერი** ეწოდება. ამრიგად, $IntA = \bigcup \mathcal{U}_A$. სხვა სიტყვებით, $IntA$ არის X სივრცის „უდიდესი" ღია ქვესიმრავლე, რომელიც შედის A-ში.

ამრიგად, ნებისმიერი ტოპოლოგიური X სივრცის ყოველ A ქვესიმრავლეს გარკვეული წესით (ცალსახად) შეესაბამება ამავე სივრცის ღია $IntA$ ქვესიმრავლე. შესაბამისობის ამ წესს (X ტოპოლოგიური სივრცის) **ინტერიერი აღების ოპერატორი** ეწოდება. მაშასადამე, X სივრცის ინტერიერი აღების ოპერატორი წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი წესით განსაზღვრულ ასახვას $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლიდან $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლეში.

4.7.2. წინადადება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = IntA$.

დამტკიცება ტრივიალურია.

4.7.3. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A \subset X$ სიმრავლის **შიგა წერტილი**, თუ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \subset A$.

4.7.4. შენიშვნა. 4.7.3 განმარტების ჭრილში წინადადება 4.4.2. ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლის ყოველი წერტილი მისი შიგა წერტილია.

4.7.5. წინადადება. ნებისმიერი ტოპოლოგიური X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის ინტერიერი A სიმრავლის ყველა შიგა წერტილთა სიმრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x \in IntA = \bigcup \mathcal{U}_A$. მაშინ არსებობს ერთი მაინც X-ში ღია U სიმრავლე ისეთი, რომ $x \in U \subset A$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ x წერტილი A სიმრავლის შიგა წერტილია.

პირიქით, ვთქვათ, x წერტილი A სიმრავლის შიგა წერტილია. მაშინ არსებობს X-ში ღია U სიმრავლე ისეთი, რომ $x \in U \subset A$. ცხადია, რომ $U \in \mathcal{U}_A$ და ე. ი. $U \subset \bigcup \mathcal{U}_A$. ამრიგად, $x \in U \subset \bigcup \mathcal{U}_A = IntA$.

წინადადება 4.7.5 დამტკიცებულია.

4.7.6. წინადადება. ნებისმიერი ტოპოლოგიოური X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$IntA = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

დამტკიცება. რადგან $\overline{X \setminus A} \supset X \setminus A$, ამიტომ $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset X \setminus (X \setminus A) = A$. ცხადია, $X \setminus \overline{X \setminus A}$ ღიაა X-ში. ე. ი. $X \setminus \overline{X \setminus A}$ არის X-ის ღია ქვესიმრავლე, რომელიც შედის A-ში. რადგან $IntA$ „უდიდესი" ასეთი ღია ქვესიმრავლეა, ამიტომ $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset IntA$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $IntA \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$, რისთვისაც საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $(IntA) \bigcap (\overline{X \setminus A}) = \varnothing$.

მართლაც, რადგან $A \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$ და $IntA \subset A$, ცხადია გვექნება: $(IntA) \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$. magram, $IntA$ ღიაა X-ში. ამიტომ, 4.6.5-ის თანახმად, $(IntA) \bigcap (\overline{X \setminus A}) = \varnothing$. ამრიგად, ჩართვა $IntA \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$ დამტკიცებულია.

$X \setminus \overline{X \setminus A} \subset IntA$ და $IntA \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$ თანაფარდობებიდა, საბოლოოდ, დავასკვნით, რომ $IntA = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

წინადადება 4.7.6 დამტკიცებულია.

4.7.7. თეორემა. ყოველი ტოპოლოგიური X სივრცის ინტერიერის აღების ოპერატორს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(IO 1) $IntX = X$.

(IO 2) ყოველი $A \subset X$-სათვის, $IntA \subset A$.

(IO 3) ყოველი $A, B \subset X$-სათვის, $Int(A \bigcap B) = (IntA) \bigcap (IntB)$.

(IO 4) ყოველი $A \subset X$-სათვის, $Int(IntA) = IntA$

დამტკიცება. (IO 1) და (IO 2) პირდაპირ გამომდინარეობს განმარტებიდან. (IO 4) გამომდინარეობს იქედან, რომ $IntA$ – ღია სიმრავლეა.

ვაჩვენოთ (IO 3). მართლაც, 4.7.6-ის, დე მორგანის კანონებისა და (CO 3)-ის თანახმად, გვექნება:

$$Int(A \bigcap B) = X \setminus (\overline{X \setminus (A \bigcap B)}) = X \setminus (\overline{(X \setminus A) \bigcup (X \setminus B)}) = X \setminus ((\overline{X \setminus A}) \bigcup (\overline{X \setminus B})) =$$

$$= (X \setminus (\overline{X \setminus A})) \bigcap (X \setminus (\overline{X \setminus B})) = IntA \bigcap IntB.$$

წინადადება 4.7.7 დამტკიცებულია.

შემდეგ წინადადებას გთავაზობთ დაუმტკიცებლად (სავარჯიშოს სახით, შესაძლებელია ამ თეორემის დამოუკიდებლად დამტკიცება).

4.7.8. წინადადება (ტოპოლოგიის შემოტანა ინტერიერის აღების ოპერაციის საშუალებით). ვთქვათ, X – რაიმე სიმრავლეა და ვთქვათ $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ისეთი ასახვაა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ოთხ პირობას (იხ. (IO 1), (IO 2), (IO 3), (IO 4)):

- $I(X) = X$.
- ყოველი $A \subset X$-სათვის, $I(A) \subset A$.
- ყოველი $A, B \subset X$-სათვის, $I(A \bigcap B) = I(A) \bigcap I(B)$.
- ყოველი $A \subset X$-სათვის, $I(I(A)) = I(A)$.

განვიხილოთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა შემდეგი τ ოჯახი:

$$\tau = \{A \subset X \mid A = IntA\}.$$

ამ პირობებში, τ ოჯახი წარმოადგენს გარკვეულ ტოპოლოგიას X სიმრავლეზე და ყოველი $A \subset X$ -სათვის $I(A)$ წარმოადგენს A სიმრავლის ინტერიერს (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში.

4.8. ერთი გამოყენება.

დავამტკიცოთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

ყოველი m და k ნატურალური რიცხვებისათვის $N(m,k)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ იმ არითმეტიკული პროგრესიის ყველა წევრთა სიმრავლე, რომლის პირველი წევრია m, ხოლო სხვაობა k -ს ტოლია. ცხადია, $N(m,k) \subset \mathbb{N}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{N}$ -ის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{B} = \{N(m,k)\}_{m,k\in\mathbb{N}}$ ოჯახი აკმაყოფილებს თეორემა 4.3.3-ის $(B1)$ და $(B2)$ პირობებს.

მართლაც, ვთქვათ, n – ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. მაშინ, $n \in \mathbb{N} = N(1,1) \in \mathcal{B}.$ ასე, რომ, $(B2)$ სრულდება.

დავუშვათ, ახლა, $N(m_1,k_1), N(m_2,k_2) \in \mathcal{B}$ და ვთქვათ, $N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2) \neq \varnothing$. ვთქვათ, m_0 წარმოადგენს $N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2)$ სიმრავლის მინიმალურ ელემენტს (ასეთი არსებობს, რადგან $N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2)$ სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეა) და ვთქვათ, k_0 არის k_1 და k_2 რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი. მარტივად მოწმდება, რომ მაშინ $N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2) = N(m_0,k_0)$. ამრიგად, ნებისმიერი $n \in N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2)$ -სათვის, n ეკუთვნის $N(m_0,k_0)$ სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს $N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2)$ სიმრავლის ქვესიმრავლეს (სინამდვილეში, როგორც ვნახეთ, $N(m_0,k_0) = N(m_1,k_1) \bigcap N(m_2,k_2)$). ამრიგად, $\mathcal{B}$ აკმაყოფილებს $(B1)$ პირობასაც.

ამიტომ, თეორემა 4.3.4-ის თანახმად, $\mathbb{N}$ -ზე არსებობს ისეთი τ ტოპოლოგია, რომლისთვისაც $\mathcal{B}$ წარმოადგენს ერთ-ერთ ბაზისს.

შენიშვნა 1. $(\mathbb{N},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი არაცარიელი ღია ქვესიმრავლე უსასრულოა, რადგან ყოველი ასეთი სიმრავლე უნდა მოიცავდეს $\mathcal{B}$ ბაზისის ერთ ელემენტს მაინც, $\mathcal{B}$ -ს ყოველი ელემენტი კი – უსასრულოა.

შენიშვნა 2. ყოველი $m \in \mathbb{N}$ -სათვის სიმრავლეები $N(1,m), N(2,m), \ldots, N(m,m)$ ღია-ჩაკეტილია $(\mathbb{N},\tau)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში. კერძოდ, ყოველი $m \in \mathbb{N}$ -სათვის $N(m,m)$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

მართლაც, ის რომ ყოველი $1 \le i \le m$ -სათვის $N(i,m)$ ღიაა გამომდინარეობს იქედან, რომ $N(i,m)$ ეკუთვნის $(\mathbb{N},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისს.
შემდეგ, მარტივად მოწმდება, რომ ყოველი $i, j \in \{1,2,\ldots,m\}$ -სათვის, სადაც $i \neq j$, გვაქვს: $N(i,m) \bigcap N(j,m) = \varnothing$ და $\bigcup_{i=1}^{m} N(i,m) = \mathbb{N}$.ამიტომ, ყოველი ნატურალური $1 \le n \le m$ -სათვის

გვექნება: $N(n,m)=\mathbb{N}\setminus\bigcup_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne n}} N(i,m)$ და რადგან $\bigcup_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne n}} N(i,m)$ სიმრავლე (როგორც ღია სიმრავლეთა გაერთიანება) ღიაა, ამიტომ $\mathbb{N}\setminus\bigcup_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne n}} N(i,m)=N(n,m)$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.
დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობის მარტივი რიცხვები, ასე, რომ ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლეს ექნება მაშინ ასეთი სახე: $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$.

$$\mathbb{N}\setminus\{1\}=\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i).$$

მართლაც, თუ $m\in\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i)\subset\mathbb{N}$, მაშინ m უნდა ეკუთვნოდეს ერთს მაინც $N(p_i, p_i)$-ს და რადგან $p_i\ge 2$, ამიტომ, $m\ne 1$. ე. ი. $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ და მაშასადამე,

$$\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i)\subset\mathbb{N}\setminus\{1\}. \quad (*)$$

ვთქვათ, ახლა, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. როგორც ვიცით, 1-ზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი წარმოიდგინება მარტივი რიცხვების ნამრავლის სახით. ვთქვათ, p არის m-ის ერთ-ერთი მარტივი მამრავლი. რადგან p – მარტივია, ამიტომ $p\in\{p_1, p_2, ..., p_N\}$, ანუ, არსებობს ისეთი $1\le i_0\le N$, რომ $p=p_{i_0}$. რადგან p არის m-ის ერთ-ერთი მამრავლი, მოიძებნება ისეთი $n\in\mathbb{N}$, rom $m=n\cdot p=n\cdot p_{i_0}$. აქედან კი დავასკვნით, რომ $m=n\cdot p_{i_0}\in\{p_{i_0}, 2p_{i_0}, 3p_{i_0}, ...\}=N(p_{i_0}, p_{i_0})$. ამრიგად,

$$\mathbb{N}\setminus\{1\}\subset\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i). \quad (**)$$

(*) და (**) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{N}\setminus\{1\}=\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i)$.

აქედან,

$$\{1\}=\mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i). \quad (***)$$

რადგან შენიშვნა 2-ის თანახმად, $N(p_1, p_1), N(p_2, p_2), ..., N(p_N, p_N)$ სიმრავლეებიდან თითოეული ჩაკეტილია და მათი რაოდენობა სასრულია, ამიტომ $\bigcup_{i=1}^{N} N(p_i, p_i)$ სიმრავლე ჩაკეტილია. მაშასადამე, (***)-ის თანახმად, ერთწერტილიანი {1} სიმრავლე – ღიაა, რაც შეუძლებელია (იხ. შენიშვნა 1). მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც უჩვენებს იმას, რომ ჩვენი დაშვება ყველა მარტივი რიცხვების სიმრავლის სასრულობის შესახებ მცდარია, ანუ, ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

4.9. სავარჯიშოები.

4.9.1. ვთქვათ, X – 3-ელემენტიანი სიმრავლეა: $X=\{a,b,c\}$. შეამოწმეთ, რომ X-ის ქვესიმრავლეთა $\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ ოჯახი ტოპოლოგიაა X-ზე, $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b,c\}\}$ და $\{\varnothing,\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ ოჯახები კი – არა.

4.9.2. ვთქვათ, X რაიმე (არაცარიელი) სიმრავლეა და A მისი რაიმე ქვესიმრავლეა. τ_A^- სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელთაგან თითოეული ან A სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ან X-ის ტოლია:

$$\tau_A^-=\{U\,|\,U\subset A \text{ ან } U=X\}.$$

შეამოწმეთ, რომ τ_A^- – ტოპოლოგიაა X-ზე. შევნიშნოთ, რომ თუ $A=\varnothing$, მაშინ τ_A^- – ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიაა X-ზე, ხოლო თუ $A=X$, მაშინ τ_A^- ტოპოლოგია დისკრეტულია.

თუ X რაიმე სიმრავლეა, ხოლო A მისი რაიმე ქვესიმრავლეა, აქ აღწერილი ტოპოლოგიური სივრცე აღვნიშნოთ X_{A-} სიმბოლოთი.

4.9.3. ვთქვათ, X რაიმე (არაცარიელი) სიმრავლეა და A მისი რაიმე ქვესიმრავლეა. τ_A^+ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელთაგან თითოეული მოიცავს A სიმრავლეს, ან ცარიელი სიმრავლეა:

$$\tau_A^+=\{U\,|\,U\supset A \text{ ან } U=\varnothing\}.$$

შეამოწმეთ, რომ τ_A^+ – ტოპოლოგიაა X-ზე. შევნიშნოთ, რომ თუ $A=\varnothing$, მაშინ τ_A^+ – დისკრეტული ტოპოლოგიაა X-ზე, ხოლო თუ $A=X$, მაშინ τ_A^+ ტოპოლოგია ანტიდისკრეტულია.

თუ X რაიმე სიმრავლეა, ხოლო A მისი რაიმე ქვესიმრავლეა, აქ აღწერილი ტოპოლოგიური სივრცე აღვნიშნოთ X_{A+} სიმბოლოთი.

4.9.4. ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის განვიხილოთ $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n-ჯერ}$ სიმრავლე (იმ შემთხვევაში, თუ $n=1$, ნაცვლად $\mathbb{R}^1$-სა წერენ $\mathbb{R}$-ს). ამრიგად, $\mathbb{R}^n$-ის ყოველი a ელემენტი წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა (დალაგებულ) $(a_1,\ldots,a_n)$ n-ეულს. შეგახსენებთ, რომ a_i-ს ($1\le i\le n$) უწოდებენ $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ელემენტის i-ური კომპონენტს, ან კოორდინატს. შევნიშნოთ, რომ $n=1$ შემთხვევაში $\mathbb{R}^n$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც წრფე, $n=2$ შემთხვევაში – როგორც სიბრტყე, $n=3$ შემთხვევაში – როგორც სივრცე და ა. შ. ყოველი $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$-სათვის და ყოველი $r>0$ რიცხვისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: $B(a;r)=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<r\right\}$. $\mathbb{R}^n$-ის ამ ქვესიმრავლეს ვუწოდოთ **(ღია) ბირთვი** ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r. ცხადია, რომ $n=1$ შემთხვევაში $B(a,r)$ წარმოადგენს $(a-r;a+r)$ ღია ინტერვალს, $n=2$ შემთხვევაში $B(a,r)$ არის a ცენტრისა და r რადიუსის მქონე წრე შემომსაზღვრელი წრეწირის გარეშე, $n=3$ შემთხვევაში $B(a,r)$ წარმოადგენს a ცენტრისა და r რადიუსის მქონე ბირთვს შემომსაზღვრელი სფეროს გარეშე და ა. შ. $\mathbb{R}^n$-ის O ქვესიმრავლეს დავარქვათ ღია, თუ ყოველი $a=(a_1,\ldots,a_n)\in O$-სათვის არსებობს ისეთი $r>0$ ნამდვილი რიცხვი, რომ $B(a;r)\subset O$. შეამოწმეთ, რომ $\mathbb{R}^n$-ის ყველა ამ აზრით ღია

ქვესიმრავლეთა ოჯახი ქმნის გარკვეულ ტოპოლოგიას $\mathbb{R}^n$-ზე, რომელსაც $\mathbb{R}^n$-ზე **ბუნებრივი (ან სტანდარტული) ტოპოლოგია** ეწოდება. ამასთან, ყოველთვის, როცა ლაპარაკია $\mathbb{R}^n$-ზე, როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეზე (თუ სხვა არაფერია ნათქვამი) ყოველთვის მხედველობაში აქვთ სწორედ ეს ტოპოლოგია. შეამოწმეთ, რომ $\mathbb{R}^n$-ის ყველა შესაძლო ღია ბირთვების ოჯახი წარმოადგენს აღწერილი ტოპოლოგიის ერთ-ერთ ბაზისს.

4.9.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ τ – დისკრეტული ტოპოლოგიაა X სიმრავლეზე, მაშინ (X,τ) სივრცის ყოველი ბაზისი შეიცავს X სივრცის ყოველ ერთწერტილიან ქვესიმრავლეს (საიდანაც გამომდინარეობს, რომ დისკრეტული (X,τ) სივრცის წონა X სიმრავლის სიმძლავრის ტოლია.

4.9.6. შეამოწმეთ, რომ $\mathbb{R}$-ზე ბუნებრივი ტოპოლოგიის ბაზისს წარმოადგენს ყველა რაციონალური ბოლოების მქონე ღია ინტერვალების ოჯახი. ამდენად, აღნიშნული ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის მეორე აქსიომას.

მითითება: ჯერ შეამოწმეთ, რომ ყოველი ღია ინტერვალი წარმოიდგინება რაციონალურ ბოლოებიანი ღია ინტერვალების გაერთიანების სახით.

შენიშვნა: მტკიცდება, ასევე, რომ ნებისმიერი $n>1$-სათვისაც $\mathbb{R}^n$ თვლადბაზისიანია (აქ ბაზისს ქმნის რაციონალურ კოორდინატებიანი ცენტრისა და რაციონალური სიგრძის რადიუსის მქონე ყველა ღია ბირთვების ოჯახი).

4.9.7. შეამოწმეთ, რომ თუ ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის მეორე აქსიომას, მაშინ ეს სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის პირველ აქსიომასაც (შევნიშნავთ, დასაბუთების გარეშე, რომ შებრუნებული დებულება არ არის მართებული).

4.9.8. იპოვეთ $\mathbb{R}$-ის ქვემოთ მოცემული თერთმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის ჩაკეტვა და ინტერიერი (შეთანხმებისამებრ, ამ შემთხვევაში $\mathbb{R}$-ზე განიხილება ბუნებრივი ტოპოლოგია):

$$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{N},\ \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$$

4.9.9. ა) შეამოწმეთ, რომ $\mathbb{R}$-ის ქვესიმრავლეთა

$$\mathcal{B}=\{(a;+\infty)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$$

ოჯახი აკმაყოფილებს თეორემა 4.3.3-ის $(B1)$ და $(B2)$ პირობებს და მაშასადამე, თეორემა 4.3.4-ის თანახმად, $\mathcal{B}$ წარმოადგენს გარკვეული τ ტოპოლოგიის ბაზისს $\mathbb{R}$-ზე.

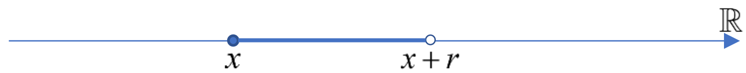
$(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცე აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^{\to}$ სიმბოლოთი.

ბ) იპოვეთ $\mathbb{R}^{\to}$ ტოპოლოგიური სივრცის შემდეგი თერთმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის ჩაკეტვა და ინტერიერი:

$$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{N},\ \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$$

4.9.10. ზორგენფრეის[9] წრფე. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლე. ყოველი $x \in \mathbb{R}$-სათვის და ყოველი $r > 0$ რაციონალური რიცხვისათვის განვიხილოთ ნახევრად ღია ინტერვალი:

$$[x; x+r) = \{t \in \mathbb{R} \mid x \le t < x+r\}.$$



ყოველი $x \in \mathbb{R}$-სათვის $\mathcal{B}(x)$-ით აღვნიშნოთ ყველა ასეთ ნახევრად ღია ინტერვალთა ოჯახი:

$$\mathcal{B}(x) = \{[x; x+r) \mid r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$

შეამოწმეთ, რომ სიმრავლეთა $\{U \mid U \in \mathcal{B}(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ ოჯახი აკმაყოფილებს თეორემა 4.4.5-ის $(BP1)$, $(BP2)$ და $(BP3)$ პირობებს, საიდანაც თეორემა 4.4..6-ის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\mathbb{R}$ სიმრავლის ყველა ისეთ O ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელთაგან თითოეულის ყოველი x-სათვის არსებობს ისეთი $U \in \mathcal{B}(x)$, რომ $U \subset O$, წარმოადგენს გარკვეულ τ_S ტოპოლოგიას $\mathbb{R}$-ზე და ყოველი $x \in \mathbb{R}$-სათვის $\mathcal{B}(x)$ წარმოადგენს მიდამოთა ბაზისს $(\mathbb{R}, \tau_S)$ ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილში. ამ ტოპოლოგიურ სივრცეს ზორგენფრეის წრფეს უწოდებენ.

$(\mathbb{R}, \tau_S)$ ტოპოლოგიური სივრცე (ზორგენფრეის წრფე) აღვნიშნოთ $\mathbb{R}_S$ სიმბოლოთი.

იპოვეთ $\mathbb{R}_S$ ტოპოლოგიური სივრცის შემდეგი თერთმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის ჩაკეტვა და ინტერიერი:

$$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{N},\ \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$$

4.9.11. ვთქვათ, X – ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლეა და x_0 – ამ სიმრავლის რაიმე წერტილია. განვიხილოთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა შემდეგი ოჯახი:

$$\tau = \{O \subset X \mid x_0 \notin O \text{ ან } X \setminus O \text{ სიმრავლე არაუმეტეს სასრულია}\}.$$

ა) შეამოწმეთ, რომ τ – ტოპოლოგიაა X-ზე.

თუ X – რაიმე უსასრულო სიმრავლეა და x_0 – ამ სიმრავლის რაიმე წერტილია, აქ აღწერილი (X, τ) ტოპოლოგიური სივრცე აღვნიშნოთ X_{x_0} სიმბოლოთი.

ბ) ყოველი $x \in X$-სათვის, სადაც $x \ne x_0$, ერთწერტილიანი სიმრავლე $\{x\}$ – ღია-ჩაკეტილია X_{x_0}-ში.

[9] რობერტ ზორგენფრეი (1915 - 1995) – ამერიკელი მათემატიკოსი, კალიფორნიის უნივერსიტეტის პროფესორი.

გ) სიმრავლე $\{x_0\}$ ჩაკეტილია, მაგრამ არ არის ღია X_{x_0} -ში.

დ) შეამოწმეთ, რომ X_{x_0} ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი A ქვესიმრავლისათვის:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{თუ } A \text{ სასრულია;} \\ A \bigcup \{x_0\}, & \text{თუ } A \text{ უსასრულოა,} \end{cases}$$

და

$$IntA = \begin{cases} A, & \text{თუ } X \setminus A \text{ არაუმეტეს სასრულია;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{თუ } X \setminus A \text{ უსასრულოა.} \end{cases}$$

ე) შეამოწმეთ, რომ X_{x_0} ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ორი ჩაკეტილი უსასრულო ქვესიმრავლის თანაკვეთა არაცარიელია.

ვ) ვთქვათ, $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ და τ აქ აღწერილი ტოპოლოგიაა $X = \mathbb{R}$ -ზე (იხ. 4.10.11 ა)). იპოვეთ $\mathbb{R}_0$ ტოპოლოგიური სივრცის შემდეგი თოთხმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის ჩაკეტვა და ინტერიერი:

$\varnothing$, $(0;1)$, $[0;1)$, $(0;1]$, $[0;1]$, $(0;1)\bigcup(1;2)$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$,

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

4.9.12. ვთქვათ, (X,τ) – ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეა (სადაც τ – ტოპოლოგიაა X -ზე), ხოლო $M \subset X$ – X -ის ნებისმიერი ქვესიმრავლეა. განვიხილოთ $\mathcal{P}(M)$ სიმრავლის (ანუ, M სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის) შემდეგი τ_M ქვესიმრავლე:

$$\tau_M = \{O \mid O \subset M \text{ და არსებობს ისეთი (ერთი მაინც) } O' \in \tau \text{, რომ } O = O' \bigcap M\}.$$

ნათელია, რომ τ_M სიმრავლის ელემენტები „მიიღება" X -ის ყველა შესაძლო ღია სიმრავლეთა თანაკვეთების შედეგად M სიმრავლესთან.

შეამოწმეთ, რომ τ_M წარმოადგენს ტოპოლოგიას M სიმრავლეზე. ამ ტოპოლოგია ეწოდება (X -დან) **ინდუცირებული** (ანუ, წარმოქმნილი) **ტოპოლოგია** X ტოპოლოგიური სივრცის M ქვესიმრავლეზე. ყოველთვის, როცა ლაპარაკია რაიმე ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეზე, როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეზე, მხედველობაში აქვთ სწორედ ეს (X -დან ინდუცირებული) ტოპოლოგია. ასეთ შემთხვევაში, (M,τ_M) ტოპოლოგიურ სივრცეს (ან, უბრალოდ, M -ს) X სივრცის **ქვესივრცეს** უწოდებენ. კერძოდ, ყოველთვის, როცა საუბარი იქნება $\mathbb{R}$ -ის ქვესიმრავლეზე, როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეზე (მაგალითად, ღია ინტერვალზე, ან ჩაკეტილ მონაკვეთზე), მხედველობაში გვექნება $\mathbb{R}$ -დან ინდუცირებული ტოპოლოგია (შეგახსენებთ, რომ, თუ სხვა არაფერია ნათქვამი, $\mathbb{R}$ -ზე, შეთანხმებისამებრ, ყოველთვის იგულისხმება ბუნებრივი ტოპოლოგია).

4.9.13.

ა) შეამოწმეთ, რომ: ანტიდისკრეტული სივრცის ყოველი ქვესივრცე ანტიდისკრეტულია.

ბ) შეამოწმეთ, რომ: დისკრეტული სივრცის ყოველი ქვესივრცე დისკრეტულია.

გ) ვთქვათ, a და b – ნებისმიერი ორი ნამდვილი რიცხვია, სადაც $a<b$. შეამოწმეთ, რომ $(a;b)$ ინტერვალის, როგორც $\mathbb{R}$-ის ქვესივრცის ნებისმიერ $x\in(a;b)$ წერტილში მიდამოთა ერთ-ერთ ბაზისს აქვს შემდეგი სახე:

$$\{(s;t)\mid a\le s<x<t\le b\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{R}$-ის $(a;b)$ ქვესივრცის ნებისმიერ x წერტილში არსებობს მიდამოთა უფრო „ეკონომიური“ ბაზისი. ასეთია, მაგალითად, $\left\{\left(x-\frac{1}{n};x+\frac{1}{n}\right)\bigcap(a;b)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

დ) ვთქვათ, a და b – ნებისმიერი ორი ნამდვილი რიცხვია, სადაც $a<b$. შეამოწმეთ, რომ $[a;b]$ მონაკვეთის, როგორც $\mathbb{R}$-ის ქვესივრცის ნებისმიერ $x\in(a;b)$ წერტილში მიდამოთა ერთ-ერთი ბაზისია $\{(s;t)\mid s,t\in\mathbb{R},\ a\le s<x<t\le b\}$, $x=a$ წერტილში მიდამოთა ერთ-ერთი ბაზისია $\{[a;s)\mid s\in\mathbb{R}, a<s\le b\}$, ხოლო $x=b$ წერტილში მიდამოთა ერთ-ერთი ბაზისია $\{(t;b]\mid t\in\mathbb{R}, a\le t<b\}$. შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც გ) შემთხვევაში, აქაც ყოველ წერტილში არსებობს მოდამოთა უფრო „ეკონომიური“ ბაზისი. მაგალითად, $a<x<b$ წერტილისათვის ასეთია $\left\{\left(x-\frac{1}{n};x+\frac{1}{n}\right)\bigcap[a;b]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x=a$ წერტილისათვის ასეთია $\left\{\left[a;a+\frac{1}{n}\right)\bigcap[a;b]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, ხოლო $x=b$ წერტილისათვის ასეთია $\left\{\left(b-\frac{1}{n};b\right]\bigcap[a;b]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4.9.14. მიუთითეთ $\mathbb{R}$-ის ღია ქვესიმრავლეთა ისეთი (უსასრულო) სისტემა, რომლის თანაკვეთა არ არის ღია.

4.9.15. მიუთითეთ $\mathbb{R}$-ის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა ისეთი (უსასრულო) სისტემა, რომლის გაერთიანება არ არის ჩაკეტილი.

4.9.16.

<u>განმარტება 1</u>. ამბობენ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_0 აქსიომას, ან, რომ X არის T_0 **სივრცე**, თუ X სივრცის ნებისმიერი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული x_1 და x_2 წერტილიდან ერთს მაინც გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორე წერტილს.

<u>განმარტება 2</u>. ამბობენ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_1 აქსიომას, ან, რომ X არის T_1 **სივრცე**, თუ X სივრცის ნებისმიერი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული x_1 და x_2 წერტილიდან თითოეულს გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორეს.

<u>განმარტება 3</u>. ამბობენ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_2 აქსიომას, ან, რომ X არის T_2 სივრცე, ან, რომ X არის **ჰაუსდორფის სივრცე**, თუ X სივრცის ნებისმიერი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული x_1 და x_2 წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილების

თანაუკვეთი მიდამოები, ანუ არსებობს x_1-ის ისეთი U_{x_1} მიდამო და არსებობს x_2-ის ისეთი U_{x_2} მიდამო, რომ $U_{x_1} \bigcap U_{x_2} = \varnothing$.

ცხადია, რომ ანტიდისკრეტული სივრცე რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ წერტილს არ არის T_0-სივრცე. ასევე, განმარტებებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ყოველი T_2 სივრცე T_1 სივრცეა და ყოველი T_1 სივრცე T_0 სივრცეა. ასე, რომ ყველა T_0 სივრცეთა კლასი მოიცავს ყველა T_1 სივრცეთა კლასს, ეს უკანასკნელი კი მოიცავს ყველა T_2 სივრცეთა კლასს.

ა) მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი ტოპოლოგიური სივრცის მაგალითი, რომელის არ არის ანტიდისკრეტული და არ აკმაყოფილებს განცალების T_0 აქსიპომას.

ბ) განვიხილოთ ორ ელემენტიანი $\{a,b\}$ სივრცე, რომლის ღია ქვესიმრავლეებია მხოლოდ $\varnothing$, $\{a\}$ და $\{a,b\}$. შეამოწმეთ, რომ ეს სივრცე არის T_0 მაგრამ არ არის T_1 სივრცე.

გ) განვიხილოთ ნებისმიერი უსასრულო X სიმრავლე. შემოვიღოთ ამ სიმრავლეზე ტოპოლოგია შემდეგი წესის მიხედვით: O სიმრავლე გამოვაცხადოთ ღია სიმრავლედ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $O = \varnothing$, $O = X$ ან თუ O-ს დამატება X-მდე ($X \setminus O$) სასრული სიმრავლეა. შეამოწმეთ, რომ ეს მართლაც ტოპოლოგიაა X-ზე და რომ ეს ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_1 აქსიომას, მაგრამ არ არის ჰაუსდორფის.

დ) დაამტკიცეთ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_1 აქსიომას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის ერთწერტილიანი $\{x\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია X-ში.

4.9.17. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი $i \in \{0,1,2\}$-სათვის ნებისმიერი T_i-სივრცის (იხ. 4.9.16) ნებისმიერი ქვესივრცე (იხ. იხ. 4.9.12) ასევე T_i-სივრცეა.

4.9.18. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n\,(n \in \mathbb{N})$ (იხ. 4.9.4) და $\mathbb{R}_S$ (ზორგენფრეის წრფე (იხ. 4.9.10)) – ჰაუსდორფის სივრცეებია (იხ. 4.9.16). (იხ. 4.9.12, 4.9.16,).