§5. ᲢᲝᲞᲝᲚᲝᲒᲘᲣᲠᲘ ᲡᲘᲕᲠᲪᲔ – ᲜᲐᲬᲘᲚᲘ ᲛᲔᲝᲠᲔ (ᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲘᲡ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘ, ᲡᲐᲖᲦᲕᲐᲠᲘ, ᲓᲐᲒᲠᲝᲕᲔᲑᲘᲡ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘ, ᲬᲐᲠᲛᲝᲔᲑᲣᲚᲘ ᲡᲘᲛᲠᲐᲕᲚᲔ, ᲘᲖᲝᲚᲘᲠᲔᲑᲣᲚᲘ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘ, ᲧᲕᲔᲚᲒᲐᲜ ᲛᲙᲕᲠᲘᲕᲘ, ᲗᲐᲕᲘᲡ ᲗᲐᲕᲨᲘ ᲛᲙᲕᲠᲘᲕᲘ ᲓᲐ ᲐᲠᲡᲐᲓ ᲛᲙᲕᲠᲘᲕᲘ ᲥᲕᲔᲡᲘᲛᲠᲐᲕᲚᲔᲔᲑᲘ, ᲡᲔᲞᲐᲠᲐᲑᲔᲚᲣᲠᲘ ᲡᲘᲕᲠᲪᲔ).

5.1. ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლის საზღვარი.

5.1.1. განმარტება. ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$. A სიმრავლის **საზღვარი** X ტოპოლოგიურ სივრცეში აღინიშნება FrA (ან $Fr_X A$) სიმბოლოთი და განიმარტება როგორც A სიმრავლის ჩაკეტვისა და მისი $X \setminus A$ დამატების ჩაკეტვის თანაკვეთა. ამრიგად,

$$FrA = \bar{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)} .$$

FrA სიმრავლის ყოველ წერტილს A სიმრავლის **საზღვრის წერტილი** ეწოდება.

5.1.2. წინადადება. ვთქვათ, X – ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$. $x \in X$ წერტილი წარმოადგენს A სიმრავლის საზღვრის წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x წერტილის ყოველი U მიდამოსათვის, $U \bigcap A \neq \varnothing$ და $U \bigcap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

დამტკიცება. დებულების სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს წინადადება 4.6.4-დან.

5.1.3. წინადადება. ყოველი X _ ტოპოლოგიური სივრცისათვის და ყოველი $A \subset X$ ქვესიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$FrA = \bar{A} \setminus IntA .$$

დამტკიცება.(I ვარიანტი). ვთქვათ, $x \in FrA = \bar{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)}$. მაშინ $x \in \bar{A}$ და $x \in \overline{X \setminus A}$. რადგან $x \in \overline{X \setminus A}$, ამიტომ (იხ. 4.6.4) x-ის ნებისმიერი მიდამო უნდა კვეთდეს $X \setminus A$-ს. მაშასადამე, x-ის არცერთი მიდამო არ შედის A-ში, ანუ, x არ წარმოადგენს A სიმრავლის შიგა წერტილს და ე. ი. $x \notin IntA$-ს. ამრიგად, $x \in \bar{A}$ და $x \notin IntA$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x \in \bar{A} \setminus IntA$. ამით ნაჩვენებია, რომ $FrA \subset \bar{A} \setminus IntA$.

ვთქვათ, ახლა, $x \in \bar{A} \setminus IntA$. მაშინ, $x \in \bar{A}$ და $x \notin IntA$. რადგან $x \notin IntA$, ამიტომ x არ არის A სიმრავლის შიგა წერტილი, ანუ, x-ს არ გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც შედის A-ში. მაშასადამე, x-ის ნებისმიერი მიდამო უნდა კვეთდეს $X \setminus A$-ს. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $x \in \overline{X \setminus A}$. ამრიგად, $x \in \bar{A}$ და $x \in \overline{X \setminus A}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x \in \bar{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)} = FrA$. ამით, ჩართვა $\bar{A} \setminus IntA \subset FrA$ და მასთან ერთად $FrA = \bar{A} \setminus IntA$ ტოლობა დამტკიცებულია.

(II ვარიანტი). წინადადება 4.7.6-ის თანახმად, გვაქვს: $\bar{A} \setminus IntA = \bar{A} \setminus (X \setminus \overline{(X \setminus A)})$. მარტივად მოწმდება (შეამოწმეთ!), რომ $\bar{A} \setminus (X \setminus \overline{(X \setminus A)}) = \bar{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)}$. ამრიგად, $\bar{A} \setminus IntA = \bar{A} \setminus (X \setminus \overline{(X \setminus A)}) = \bar{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)} = FrA$.

წინადადება 5.1.3. დამტკიცებულია.

5.1.4. მაგალითები. განვიხილოთ $(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცე და მისი $(0;1)$ ქვესიმრავლე. მაშინ,

ა) თუ τ – ბუნებრივი ტოპოლოგიაა, $Fr(0;1)=\{0,1\}$;

ბ) თუ τ – დისკრეტული ტოპოლოგიაა, $Fr(0;1)=\varnothing$;

გ) თუ τ – ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიაა, $Fr(0;1)=\mathbb{R}$.

5.2. დაგროვების და იზოლირებული წერტილები. წარმოებული სიმრავლე.

5.2.1. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A\subset X$ ქვესიმრავლის **დაგროვების** (ან, **ზღვარითი**) **წერტილი**, თუ x წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს A სიმრავლის ერთს მაინც ისეთ წერტილს, რომელიც განსხვავდება x წერტილისაგან.

შევნიშნავთ, რომ სიმრავლის დაგროვების წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს და შეიძლება არც ეკუთვნოდეს მოცემულ სიმრავლეს. ამასთან, მოცემული სიმრავლის წერტილი შეიძლება იყოს და შეიძლება არც იყოს ამ სიმრავლის დაგროვების წერტილი.

5.2.2. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A\subset X$ ქვესიმრავლის **იზოლირებული წერტილი**, თუ $x\in A$ და არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომელიც არ შეიცავს A სიმრავლის x წერტილისაგან განსხვავებულ არც ერთ სხვა წერტილს, ანუ, $U\bigcap A=\{x\}$.

როგორც ვხედავთ, მოცემული სიმრავლის იზოლირებული წერტილი (განსხვავებით დაგროვების წერტილისაგან) მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის.

5.2.3. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის $A\subset X$ ქვესიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილთა სიმრავლეს A სიმრავლის **წარმოებული სიმრავლე** ეწოდება და აღინიშნება A^d სიმბოლოთი.

5.2.4. მაგალითები.

ა) ვთქვათ, τ – ბუნებრივი ტოპოლოგიაა $\mathbb{R}$-ზე. განვიხილოთ $(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის $A=(0;1)\bigcup\{2\}$ ქვესიმრავლე. მაშინ, $x=2$ – ამ სიმრავლის (ერთადერთი) იზოლირებული წერტილია, ხოლო $A^d=[0;1]$.

ბ) ვთქვათ, τ – დისკრეტული ტოპოლოგიაა $\mathbb{R}$-ზე. განვიხილოთ $(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის $A=(0;1)\bigcup\{2\}$ ქვესიმრავლე. მაშინ, ამ სიმრავლის ყოველი წერტილი მისი იზოლირებული წერტილია, ხოლო $A^d=\varnothing$.

ბ) ვთქვათ, τ – ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიაა $\mathbb{R}$-ზე. განვიხილოთ $(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის $A=(0;1)\bigcup\{2\}$ ქვესიმრავლე. მაშინ, ამ სიმრავლეს არ გააჩნია არცერთი იზოლირებული წერტილი, ხოლო $A^d=\mathbb{R}$.

5.3. ყველგან მკვრივი, არსად მკვრივი და თავის თავში მკვრივი სიმრავლეები. სეპარაბელური სივრცის ცნება.

5.3.1. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება **ყველგან მკვრივი** X-ში, თუ $\overline{A} = X$.

მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია $(\mathbb{R}, \tau)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში, სადაც τ-ბუნებრივი ტოპოლოგიაა $\mathbb{R}$-ზე; თუმცა, თუ τ იქნება დისკრეტული ტოპოლოგია $\mathbb{R}$-ზე, მაშინ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღარ იქნება ყველგან მკვრივი $(\mathbb{R}, \tau)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ თუ τ ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიაა $\mathbb{R}$-ზე, მაშინ $\mathbb{R}$-ის ნებისმიერი არაცარიელი ქვესიმრავლე იქნება ყველგან მკვრივი $(\mathbb{R}, \tau)$-ში.

5.3.2. წინადადება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე ყველგან მკვრივია X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X-ის ყოველი არაცარიელი ღია U ქვესიმრავლისათვის გვაქვს: $U \bigcap A \neq \varnothing$.

დამტკიცება.

საკმარისობა. ვთქვათ შესრულებულია წინადადების პირობა. ვაჩვენოთ, რომ $\overline{A} = X$. ამისათვის (რადგან $\overline{A} \subset X$), საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $X \subset \overline{A}$, ანუ, რომ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, $x \in \overline{A}$. ავიღოთ x წერტილის ნებისმიერი U მიდამო. რადგან U არის X-ის არაცარიელი ღია ქვესიმრავლე, პირობის თანახმად, $U \bigcap A \neq \varnothing$. აქედან (იხ. წინადადება 4.6.4) ვღებულობთ: $x \in \overline{A}$.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $\overline{A} = X$. განვიხილოთ X-ის ნებისმიერი არაცარიელი ღია U ქვესიმრავლე. დავაფიქსიროთ რომელიმე $x \in U \subset X = \overline{A}$ წერტილი. რადგან $x \in \overline{A}$ და U – x-ის მიდამოა, წინადადება 6.4.6-ის თანახმად გვექნება: $U \bigcap A \neq \varnothing$.

წინადადება 5.3.2 დამტკიცებულია.

5.3.3. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება **არსად მკვრივი** X-ში, თუ $X \setminus \overline{A}$ ყველგან მკვრივია X-ში.

მაგალითისთვის, განვიხილოთ $\mathbb{R}$ სივრცე ბუნებრივი ტოპოლოგიით. მაშინ შემდეგი სიმრავლეებიდან თითოეული არსად მკვრივია $\mathbb{R}$-ში: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

შევნიშნოთ, რომ $X \setminus A$ შეიძლება იყოს ყველგან მკვრივი X-ში, თუმცა, A არ იყოს არსად მკვრივი X-ში. მაგალითად, თუ $X = \mathbb{R}$ (ბუნებრივი ტოპოლოგიით) და $A = \mathbb{Q}$, მაშინ $X \setminus A$ – ყველგან მკვრივია X-ში, მაგრამ A არ არის X-ში არსად მკვრივი.

5.3.4. განმარტება. X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება **თავის თავში მკვრივი**, თუ A-ს ყოველი წერტილი A-ს დაგროვების წერტილია, ანუ, თუ $A \subset A^d$.

მაგალითად, თუ $\mathbb{R}$-ზე გვაქვს ბუნებრივი ტოპოლოგია, მაშინ, $(0;1)$ და $\mathbb{Q}$ სიმრავლეებიდან თითოეული თავის თავში მკვრივია, ხოლო $(0;1)\bigcup\{2\}$, $\mathbb{N}$ და $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ სიმრავლეებიდან არც ერთი არ არის თავი თავში მკვრივი.

5.3.5. წინადადება. $A\subset X$ სიმრავლე არსად მკვრივია X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი არაცარიელი ღია $U\subset X$ ქვესიმრავლისათვის, მოიძებნება X-ის ისეთი არაცარიელი ღია V ქვესიმრავლე, რომ $V\subset U$ და $V\bigcap A=\varnothing$.

დამტკიცება.

საკმარისობა. ვთქვათ, სრულდება წინადადების პირობა. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\overline{X\setminus\overline{A}}=X$. რადგან, ცხადია $\overline{X\setminus\overline{A}}\subset X$, შესამოწმებელია მხოლოდ, რომ $X\subset\overline{X\setminus\overline{A}}$. მართლაც, ვთქვათ, $x\in X$ – ნებისმიერი წერტილია. განვიხილოთ x-ის ნებისმიერი U მიდამო X-ში. რადგან $U\neq\varnothing$ და U ღიაა X-ში, პირობის თანახმად, მოიძებნება X-ის ისეთი არაცარიელი ღია V ქვესიმრავლე, რომ $V\subset U$ და $V\bigcap A=\varnothing$. აქედან (რადგან V ღიაა) გამომდინარეობს, რომ V სიმრავლის არცერთი წერტილი არ ეკუთვნის A სიმრავლის ჩაკეტვას (იხ. შედეგი 4.6.5), ანუ, რომ $V\subset X\setminus\overline{A}$. რადგან $\varnothing\neq V\subset U$, ამიტომ $U\bigcap(X\setminus\overline{A})\supset V\neq\varnothing$. ამრიგად, x წერტილის ნებისმიერი U მიდამო კვეთს $X\setminus\overline{A}$ სიმრავლეს, რაც ნიშნავს იმას, რომ $x\in\overline{X\setminus\overline{A}}$ (იხ. წინადადება 4.6.4).

აუცილებლობა. ვთქვათ, A – არსად მკვრივია X-ში, ანუ, რომ $X\setminus\overline{A}$ – ყველგან მკვრივია X-ში. განვიხილოთ X-ის ნებისმიერი არაცარიელი ღია U ქვესიმრავლე. რადგან $X\setminus\overline{A}$ ყველგან მკვრივია X-ში, ამიტომ წინადადება 5.3.2-ის თანახმად, $U\bigcap(X\setminus\overline{A})\neq\varnothing$. აღვნიშნოთ: $U\bigcap(X\setminus\overline{A})=V$. ცხადია, V ღიაა, არაცარიელია და $V\subset U$. ამასთან, $V\subset X\setminus\overline{A}$ და ე. ი. $V\bigcap\overline{A}=\varnothing$. მაშასადამე, მით უმეტეს, $V\bigcap A=\varnothing$.

წინადადება 5.3.5 დამტკიცებულია.

5.3.6. შედეგი. იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე იყოს არსად მკვრივი X-ში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $Int\overline{A}=\varnothing$ (ანუ, რომ A-ს ჩაკეტვას X-ში არ უნდა გაჩნდეს არცერთი შიგა წერტილი (X-ის მიმართ).

დამტკიცება.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $A\subset X$ და A არსად მკვრივია X-ში, ანუ, $\overline{X\setminus\overline{A}}=X$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\overline{A}$-ს გააჩნია ერთი მაინც შიგა x წერტილი. რადგან x – $\overline{A}$-ს შიგა წერტილია, უნდა არსებობდეს X-ში ისეთი ღია U სიმრავლე, რომ $x\in U\subset\overline{A}$. რადგან $U\subset\overline{A}$, ამიტომ $U\bigcap(X\setminus\overline{A})=\varnothing$. ე. ი. U არის x წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ კვეთს $X\setminus\overline{A}$ სიმრავლეს და ამიტომ ეს $x\in X$ წერტილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს $X\setminus\overline{A}$ სიმრავლის ჩაკეტვას (იხ. წინადადება 4.6.4). მაშასადამე, $\overline{X\setminus\overline{A}}\neq X$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $X\setminus\overline{A}$ არ არის ყველგან მკვრივი X-ში, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

საკმარისობა. ვთქვათ, $Int\overline{A}=\varnothing$. განვიხილოთ ნებისმიერი არაცარიელი ღია $U \subset X$ ქვესიმრავლე. რადგან $Int\overline{A}=\varnothing$, ამიტომ $U \not\subset \overline{A}$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში არაცარიელი U სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი იქნებოდა $\overline{A}$ სიმრავლის შიგა წერტილი) და ე. ი. $U \bigcap (X \setminus \overline{A}) \neq \varnothing$. aRvniSnoT: $V = U \bigcap (X \setminus \overline{A})$. ცხადია, V – არაცარიელი ღია სიმრავლეა, $V \subset U$, $V \bigcap \overline{A} = \varnothing$ და მით უმეტეს, $V \bigcap A = \varnothing$. მაშასადამე, წინადადება 5.3.5-ის თანახმად, A – არსად მკვრივია X-ში.

5.3.7. წინადადება. თუ A არის X ტოპოლოგიური სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე , მაშინ X-ის ყოველი ღია U ქვესიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\bar{U} = \overline{U \bigcap A}.$$

დამტკიცება. რადგან $U \bigcap A \subset U$, ამიტომ, წინადადება 4.6.3-ის თანახმად, $\overline{U \bigcap A} \subset \bar{U}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\bar{U} \subset \overline{U \bigcap A}$. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in \bar{U}$ წერტილი და ვთქვათ, W არის ამ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო. რადგან $x \in \bar{U}$, წინადადება 4.6.4-ის თანახმად, $W \bigcap U \neq \varnothing$ და ამასთან, $W \bigcap U$ (როგორც ორი ღია სიმრავლის თანაკვეთა) – ღიაა. აქედან, რადგან A არის X-ის ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე, წინადადება 5.3.2-ის გამოყენებით ვღებულობთ: $(W \bigcap U) \bigcap A \neq \varnothing$. მაგრამ, $(W \bigcap U) \bigcap A = W \bigcap (U \bigcap A)$. ამრიგად, $W \bigcap (U \bigcap A) \neq \varnothing$. მაშასადამე, x წერტილის ნებისმიერი W მიდამოსათვის გვაქვს: $W \bigcap (U \bigcap A) \neq \varnothing$. აქედან წინადადება 4.6.4-ის საფუძველზე დავასკვნით, რომ: $x \in \overline{U \bigcap A}$. აქედან, რადგან $x \in \bar{U}$ წერტილი აღებული იყო ნებისმიერად, დავასკვნით, რომ $\bar{U} \subset \overline{U \bigcap A}$. $\overline{U \bigcap A} \subset \bar{U}$ და $\bar{U} \subset \overline{U \bigcap A}$ თანაფარდობებიდან საბოლოოდ გამომდინარეობს, რომ: $\bar{U} = \overline{U \bigcap A}$.

წინადადება 5.3.7 დამტკიცებულია.

5.3.8. განმარტება. X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ X-ს გააჩნია არაუმეტეს თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლე (ბუნებრივი ტოპოლოგიით) სეპარაბელური ტოპოლოგიური სივრცეა, რადგან ყველა რაციონალურ რიცხვთა თვლადი $\mathbb{Q}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია $\mathbb{R}$-ში.

5.3.9. თეორემა. ყოველი თვლადბაზისიანი ტოპოლოგიური სივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია თვლადბაზისიანი ტოპოლოგიური X სივრცე. ავირჩიოთ X სივრცის ერთ-ერთი არაუმეტეს თვლადი $\mathcal{B}$ ბაზისი. ამ ბაზისის ყოველ არაცარიელ U ელემენტში ამოვირჩიოთ რომელიღაც ერთი x_U წერტილი და განვიხილოთ სიმრავლე: $A = \{x_U \mid U \in \mathcal{B},\ U \neq \varnothing\}$[1]. ცხადია, რომ A სიმრავლის ელემენტთა „რაოდენობა“ (უფრო ზუსტად

[1] ასეთი სიმრავლის არსებობა გამომდინარეობს სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი აქსიომიდან, რომელსაც ცერმელოს, ან, ამორჩევის აქსიომას უწოდებენ.

A სიმრავლის სიმძლავრე) არ აღემატება $\mathcal{B}$ ბაზისის „ელემენტთა“ რაოდენობას ($\mathcal{B}$-ს სიმძლავრეს) და ე. ი. A – არაუმეტეს თვლადი სიმრავლეა.

ვაჩვენოთ, რომ $\overline{A} = X$. ამისათვის (რადგან $\overline{A} \subset X$) საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $X \subset \overline{A}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და მისი ნებისმიერი O მიდამო. რადგან O – არაცარიელი ღია სიმრავლეა და $\mathcal{B}$ – X სივრცის ბაზისია, მოიძებნება ისეთი არაცარიელი $U \in \mathcal{B}$, რომ $U \subset O$. აგების თანახმად, $x_U \in U$ წერტილი ეკუთვნის A სიმრავლეს. ამრიგად, $x_U \in U \subset O$ და $x_U \in A$. ე. ი. $x_U \in O \bigcap A$, ანუ, $O \bigcap A \neq \varnothing$. გამოდის, რომ ყოველი $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი O მიდამოსათვის, $O \bigcap A \neq \varnothing$. აქედან კი, წინადადება 4.6.4-დან ვღებულობთ: $x \in \overline{A}$. ამით, ჩართვა $X \subset \overline{A}$ და მასთან ერთად $\overline{A} = X$ ტოლობაც დამტკიცებულია.

მაშასადამე, X-ს გააჩნია არაუმეტეს თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე, რაც ნიშნავს იმას, რომ X სივრცე სეპარაბელურია.

თეორემა 5.3.9 დამტკიცებულია.

5.3.10. შენიშვნა. ზემოთ მოყვანილი 5.3.9 თეორემის „შებრუნება“ არ შეიძლება: არსებობს არათვლადბაზისიანი სეპარაბელური სივრცეები. მტკიცდება, რომ ერთ-ერთი ასეთი სივრცის მაგალითია ზორგენფრეის წრფე (იხ. სავარჯიშო 4.10.10).

5.4. სავარჯიშოები.

5.4.1. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლე ბუნებრივი ტოპოლოგიით. იპოვეთ $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის საზღვარი, წარმოებული A^d სიმრავლე და A-ს ყველა იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე, თუ:

ა) $A = (a;b)$, სადაც $(a;b)$ ღია ინტერვალია ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$);

ბ) $A = [a;b]$, სადაც $[a;b]$ ჩაკეტილი ინტერვალია ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$);

გ) $A = (a;b]$, სადაც $(a;b]$ მარცხნიდან ნახევრად ღია ინტერვალია ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$);

დ) $A = \mathbb{N}$, სადაც $\mathbb{N}$ – ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა;

ე) $A = \mathbb{Q}$, სადაც $\mathbb{Q}$ – ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა;

ვ) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, სადაც $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა;

ზ) $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$;

თ) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n; n+1)$;

ი) $A = \mathbb{R}$;

კ) $A = \{1\} \bigcup (2;3) \bigcup \{4\}$.

5.4.2. განვიხილოთ $\mathbb{R}^2$ სიმრავლე ბუნებრივი ტოპოლოგიით (იხ. 4.9.4). იპოვეთ $A\subset\mathbb{R}^2$ სიმრავლის საზღვარი, წარმოებული A^d სიმრავლე და A-ს ყველა იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე, თუ:

ა) $A=B(a;r)$, სადაც $B(a;r)=\left\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<r\right\}$ – $a=(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$ ცენტრისა და r ($r\in\mathbb{R},\ r>0$) რადიუსის მქონე ღია წრეა;

ბ) $A=\overline{B(a;r)}$, სადაც $\overline{B(a;r)}=\left\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\le r\right\}$ – $a=(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$ ცენტრისა და r ($r\in\mathbb{R},\ r>0$) რადიუსის მქონე ჩაკეტილი წრეა;

გ) A არის $\mathbb{R}^2$-ის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა ორივე კოორდინატი მთელი რიცხვია;

დ) A არის $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2$-ის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა ორივე კოორდინატი რაციონალური რიცხვია;

ე) A არის $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2$-ის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა მეორე კოორდინატი მთელი რიცხვია;

ვ) $A=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R},r>0} S^1(a;r)$, სადაც ყოველი $a=(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$-სათვის და ყოველი დადებითი $r\in\mathbb{R}$ რიცხვისათვის $S^1(a;r)$-ით აღნიშნულია წრეწირი ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r $\left(S^1(a;r)=\left\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}=r\right\}\right)$;

ზ) $A=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q},\,r>0} S^1(a;r)$, სადაც ყოველი $a=(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$-სათვის და ყოველი დადებითი $r\in\mathbb{Q}$ რაციონალური რიცხვისათვის $S^1(a;r)$-ით აღნიშნულია წრეწირი ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r $\left(S^1(a;r)=\left\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}=r\right\}\right)$;

თ) $A=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R},\,0<r<1} S^1(a;r)$;

ი) $A=\{(0;n)\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ 0<y<1\}$.

5.4.3. ვთქვათ, X – 3-ელემენტიანი სიმრავლეა: $X=\{a,b,c\}$ და ვთქვათ, $\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ (იხ. 4.9.1). იპოვეთ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის თითოეული ქვესიმრავლის საზღვარი, წარმოებული სიმრავლე და თითოეული იზოლირებული წერტილი.

5.4.4. იპოვეთ $\mathbb{R}$-ის ქვემოთ მოცემული თერთმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის საზღვარი, წარმოებული სიმრავლე და იზოლირებული წერტილები (შეთანხმებისამებრ, ამ შემთხვევაში $\mathbb{R}$-ზე განიხილება ბუნებრივი ტოპოლოგია):

$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{N},\ \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$

5.4.5. იპოვეთ ზორგენფრეის წრფის (იხ. 4.9.10) შემდეგი თერთმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის საზღვარი, წარმოებული სიმრავლე და იზოლირებული წერტილები:

$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{N},\ \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$

5.4.6. ვთქვათ, $X=\mathbb{R}$, $x_0=0$, ხოლო τ – 4.9.11-ში აღწერილი ტოპოლოგიაა, $X=\mathbb{R}$-ზე, ანუ

$$\tau=\{O\subset\mathbb{R}\mid 0\notin O \text{ ან } \mathbb{R}\setminus O \text{ სიმრავლე არაუმეტეს სასრულია}\}.$$

იპოვეთ $(\mathbb{R},\tau)$ ტოპოლოგიური სივრცის შემდეგი თოთხმეტი ქვესიმრავლიდან თითოეულის საზღვარი, წარმოებული სიმრავლე და ყველა იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე:

$\varnothing,\ (0;1),\ [0;1),\ (0;1],\ [0;1],\ (0;1)\cup(1;2),\ \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{N},\ \mathbb{N},\ \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\},$

$\mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R}.$