## §6. უწყვეტობა.

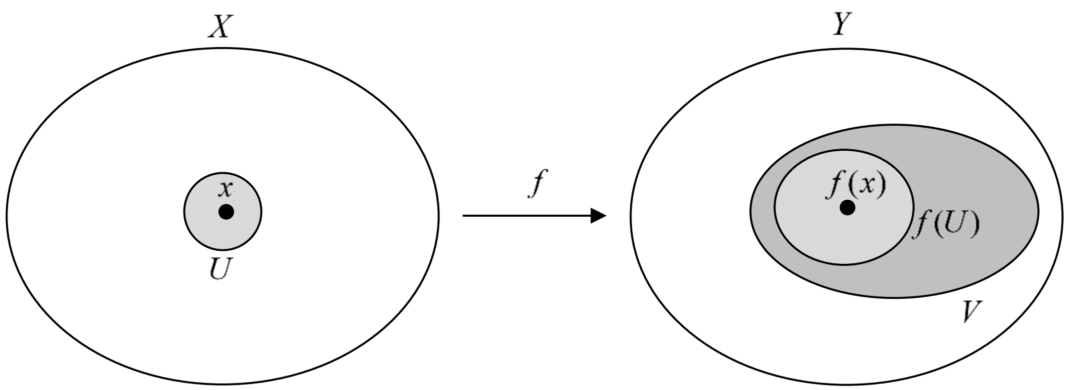
### 6.1. უწყვეტი ასახვები.

6.1.1. განმარტება. $X$ ტოპოლოგიური სივრციდან $Y$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f: X \to Y$ ასახვას ეწოდება **უწყვეტი**, თუ $Y$ ის ყოველი ღია $V$ ქვესიმრავლის $f^{-1}(V)$ წინარე სახე $f$ ასახვის დროს ღიაა $X$ -ში.

6.1.2. წინადადება. $X$ ტოპოლოგიური სივრციდან $Y$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f: X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y$ -ის ყოველი ჩაკეტილი $F$ ქვესიმრავლის $f^{-1}(F)$ წინარე სახე $f$ ასახვის დროს ჩაკეტილია $X$ -ში.

**დამტკიცება**. წინადადების დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ყოველი (კერძოდ, ღია) $B \subset Y$ ქვესიმრავლისთვის, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

6.1.3. განმარტება. $X$ ტოპოლოგიური სივრციდან $Y$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f: X \to Y$ ასახვას ეწოდება **უწყვეტი** $x \in X$ **წერტილში**, თუ $f(x) \in Y$ წერტილის ყოველი $V$ მიდამოსათვის, არსებობს $x$ წერტილის ისეთი $U$ მიდამო, რომ $f(U) \subset V$ (იხ. სქემატური ნახაზი ქვემოთ).




თუ $X$ ტოპოლოგიური სივრციდან $Y$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f: X \to Y$ ასახვა არ არის უწყვეტი $x \in X$ წერტილში, მაშინ $x$ -ს $f$ ასახვის **წყვეტის წერტილს** უწოდებენ. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f$ განიცდის წყვეტას $x$ წერტილში.

6.1.4. წინადადება. $X$ ტოპოლოგიური სივრციდან $Y$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f: X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f$ უწყვეტია ყოველ $x \in X$ წერტილში.

**დამტკიცება**.

(*საკმარისობა*). ვთქვათ, $f$ უწყვეტია ყოველ $x \in X$ წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ $f$ უწყვეტია. ამისათვის, განვიხილოთ ნებისმიერი ღია $V \subset Y$ სიმრავლე და დავამტკიცოთ, რომ $f^{-1}(V)$ ღიაა $X$ -ში. მართლაც, თუ $f^{-1}(V) = \varnothing$, დასამტკიცებელი არაფერია. დავუშვათ, $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. იმისათვის რომ ვაჩვენოთ, რომ $f^{-1}(V)$ სიმრავლე ღიაა $X$ -ში, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ $f^{-1}(V)$

სიმრავლის ყოველი წერტილი მისი შიგა წერტილია (იხ. ). მართლაც, ვთქვათ, $x \in f^{-1}(V)$. ცხადია, რომ $f(x) \in V$ და რომ $V$ (როგორც $f(x)$ წერტილის მომცველი ღია სიმრავლე) $f(x)$ წერტილის მიდამოა. რადგან, პირობით, $f$ უწყვეტია $x \in X$ წერტილში, არსებობს $x$ წერტილის ისეთი $U$ მიდამო, რომ $f(U) \subset V$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $U \subset f^{-1}(V)$. ამრიგად, $x$ არის $f^{-1}(V)$ სიმრავლის შიგა წერტილი.

(*აუცილებლობა*). ვთქვათ, $f$ ასახვა უწყვეტია. ვაჩვენოთ, რომ ის უწყვეტია ყოველ წერტილში. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და ვთქვათ $V -$ $x$ წერტილის ნებისმიერი მიდამოა. აღვნიშნოთ: $U = f^{-1}(V)$. რადგან $V$ (როგორც წერტილის მიდამო) ღიაა $Y$-ში, ამიტომ, პირობის თანახმად, $U$ ღიაა $X$-ში და რადგან, ცხადია, $x \in U$, ამიტომ $U$ არის $x$ წერტილის მიდამო. ამასთან, $f(U) = f(f^{-1}(V) \subset V$. ამრიგად, $f$ – უწყვეტია $x$ წერტილში.
ამით, წინადადება 6.1.4 დამტკიცებულია.

6.1.5. შენიშვნა. განვიხილოთ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ასახვა (რომლის განსაზღვრის არეც და მნიშვნელობათა სიმრავლეც წარმოადგენს ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ბუნებრივი ტოპოლოგიით). მარტივად მოწმდება (შეამოწმეთ!), რომ $f$ ასახვა უწყვეტია $x_0 \in \mathbb{R}$ წერტილში 6.1.3 განმარტების აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი ისეთი $x \in \mathbb{R}$ რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $|x - x_0| < \delta$, სრულდება უტოლობა: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

6.1.6.თეორემა. ვთქვათ, $X$, $Y$ და $Z$ ტოპოლოგიური სივრცეებია, $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ რაიმე ასახვებია, ხოლო $x$ – $X$ სივრცის გარკვეული წერტილია. მაშინ, თუ $f$ ასახვა უწყვეტია $x$ წერტილში და $g$ ასახვა უწყვეტია $f(x) \in Y$ წერტილში, მაშინ $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიცია უწყვეტია $x$ წერტილში.

**დამტკიცება**. განვიხილოთ $g \circ f(x) = g(f(x)) \in Z$ წერტილის ნებისმიერი $W$ მიდამო $Z$-ში. რადგან $g$ ასახვა უწყვეტია $f(x) \in Y$ წერტილში, მოიძებნება $f(x)$ წერტილის ისეთი $V$ მიდამო $Y$-ში, რომ $g(V) \subset W$.

მეორე მხრივ, რადგან $f$ ასახვა უწყვეტია $x$ წერტილში, მოიძებნება $x$ წერტილის ისეთი $U$ მიდამო $X$-ში, რომ $f(U) \subset V$.

ცხადია, $g \circ f(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$.

ამრიგად, $Z$-ში $g \circ f(x) \in Z$ წერტილის ნებისმიერი $W$ მიდამოსათვის, მოიძებნა $x$ წერტილის ისეთი $U$ მიდამო $X$-ში, რომ $g \circ f(U) \subset W$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიცია უწყვეტია $x$ წერტილში. თეორემა 6.1.6 დამტკიცებულია.

6.1.7. შედეგი. თუ $X$, $Y$ და $Z$ ტოპოლოგიური სივრცეებია, ხოლო $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ უწყვეტი ასახვებია, მაშინ $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიციაც უწყვეტია.

**დამტკიცება**. შედეგი პირდაპირ გამომდინარეობს თეორემა 6.1.6-დან და წინადადება 6.1.4-დან.

## 6.2. ჰომეომორფიზმი.

**6.2.1. განმარტება.** ვთქვათ $X$ და $Y$ – ტოპოლოგიური სივრცეებია. $f : X \to Y$ ასახვას ეწოდება **ჰომეომორფიზმი** (ან **ჰომეომორფული ასახვა**) თუ სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

i. $f$ – ბიექციური ასახვაა;

ii. $f$ ასახვა უწყვეტია;

iii. $f$ -ის შექცეული $f^{-1} : Y \to X$ ასახვა უწყვეტია.

**6.2.2. განმარტება.** ამბობენ, რომ $X$ ტოპოლოგიური სივრცე **ჰომეომორფულია** $Y$ ტოპოლოგიური სივრცის, ან რომ $X$ და $Y$ – ერთმანეთის ჰომეომორფული (ან, უბრალოდ, ჰომეომორფული) სივრცეებია, თუ არსებობს ერთი მაინც ჰომეომორფიზმი $X$ -დან $Y$ -ზე.

**6.2.3. წინადადება.** სამართლიანია შემდეგი:

a. ყოველი ტოპოლოგიური სივრცე თავისთავის ჰომეომორფულია.
b. თუ $X$ ტოპოლოგიური სივრცე ჰომეომორფულია $Y$ ტოპოლოგიური სივრცის, მაშინ $Y$ ჰომეომორფულია $X$ -ის.
c. თუ $X$ ტოპოლოგიური სივრცე ჰომეომორფულია $Y$ ტოპოლოგიური სივრცის, ხოლო $Y$ – ჰომეომორფულია $Z$ ტოპოლოგიური სივრცის, მაშინ $X$ ჰომეომორფულია $Z$ -ის.

**დამტკიცება**. წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი სამი – 1), 2) და 3) – ფაქტიდან (რომლებიც ტრივიალურად მოწმდება):

1). ყოველი ტოპოლოგიური $X$ სივრცისათვის იგივური ასახვა $id_X : X \to X$ (სადაც ყოველი $x \in X$ -სათვის $id_X(x) = x$) ჰომეომორფიზმია.

2). თუ $f : X \to Y$ ჰომეომორფიზმია, მაშინ შექცეული $f^{-1} : Y \to X$ ასახვაც ჰომეომორფიზმია.

3). თუ $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ ჰომეომორფული ასახვებია, მაშინ მათი $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიციაც ჰომეომორფული ასახვაა.

**6.2.4. შენიშვნა.**

ტოპოლოგიური სივრცის რაიმე თვისებას უწოდებენ ტოპოლოგიურ თვისებას, ან ტოპოლოგიურ ინვარიანტს, თუკი იქედან, რომ ეს თვისება გააჩნია რომელიმე ტოპოლოგიურ სივრცეს, გამომდინარეობს, რომ, იგივე თვისება გააჩნია ამ სივრცის ჰომეომორფულ ნებისმიერ სივრცესაც.

ჰომეომორფულ სივრცეებს ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურ სივრცეებს უწოდებენ. ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურ (თუმცა, შესაძლოა, სხვადასხვა) ტოპოლოგიურ სივრცეებს ერთმანეთთან აიგივებენ, რადგან თუ რაიმე თვისება გააჩნია ერთ მათგანს, იგივე თვისება გააჩნია მის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურ ნებისმიერ სივრცესაც.

**6.2.5. სავარჯიშოები.**

6.2.5.1. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ასახვა ნებისმიერი დიკრეტული სივრციდან ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეში უწყვეტია.

6.2.5.2. დაამტკიცეთ, რომ ორი დისკრეტული სივრცე ჰომეომორფულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ ერთი და იგივე სიმძლავრე აქვთ.

6.2.5.3. მოიყვანეთ მაგალითი ტოპოლოგიურ სივრცეთა ისეთი ბიექციური და უწყვეტი ასახვისა, რომელიც არ არის ჰომეომორფიზმი.

6.2.5.4. ვთქვათ, $(a;b)$ რაიმე ინტერვალია, ხოლო $[c;d]$ რაიმე მონაკვეთია. არსებობს თუ არა უწყვეტი სურექციული ასახვა $(a;b)$ ინტერვალიდან $[c;d]$ მონაკვეთზე? პასუხი დაასაბუთეთ. რა შეიძლება ითქვას ინტუიციის დონეზე, არსებობს თუ არა უწყვეტი სურექციული ასახვა $[c;d]$ მონაკვეთიდან $(a;b)$ ინტერვალზე?

6.2.5.5. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ორი (ღია) ინტერვალი ერთმანეთის ჰომეომორფულია.

6.2.5.6. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ორი (ჩაკეტილი) მონაკვეთი ერთმანეთის ჰომეომორფულია.

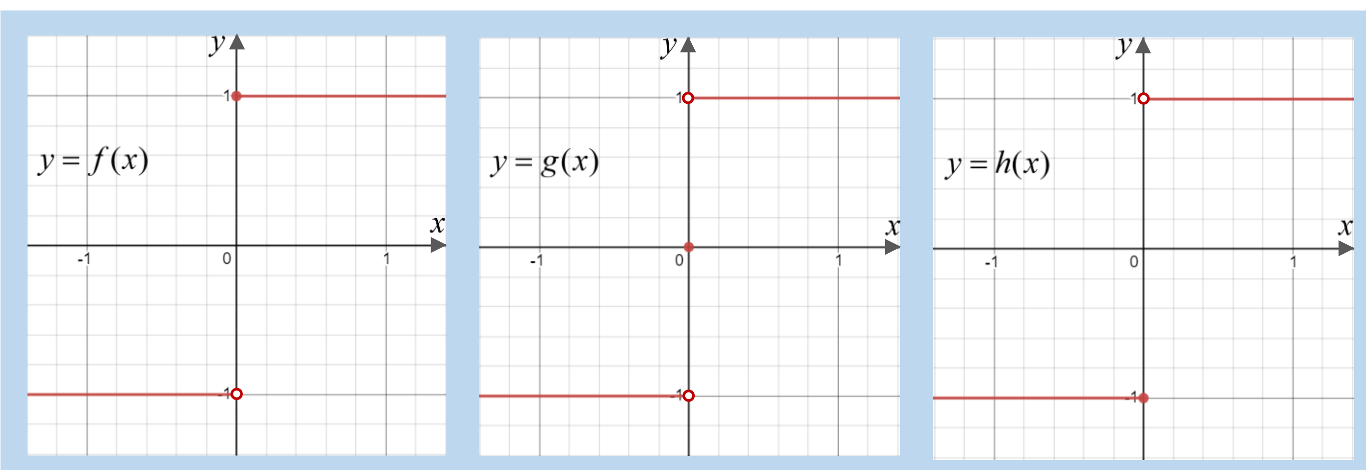
6.2.5.7. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი (ღია) $(a;b)$ ინტერვალი $\mathbb{R}$ -ის ჰომეომორფულია.

6.2.5.8. ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f: X \to Y$ ასახვას ეწოდება ლოკალურად მუდმივი, თუ ყოველ $x_0 \in X$ წერტილს გააჩნია შემდეგი თვისების მქონე $U_{x_0}$ მიდამო: არსებობს ისეთი $y_0 \in Y$, რომ ნებისმიერი $x \in U_{x_0}$ -სათვის $f(x) = y_0$. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f$ ასახვა მუდმივია $U_{x_0}$ -ზე. იმ შემთხვევაში თუ $U_{x_0} = X$, $f$ ასახვას მუდმივი ასახვა ეწოდება. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ლოკალურად მუდმივი (კერძოდ, მუდმივი) ასახვა უწყვეტია.

6.2.5.9. განვიხილოთ სამი – $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ და $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – ასახვა (სადაც $\mathbb{R}$ – ნამდვილ რიცხვთა სივრცეა ბუნებრივი ტოპოლოგიით), რომლებიც განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x \ge 0 \\ -1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0 \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \\ -1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}, \quad h(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0 \\ -1, & \text{თუ } x \le 0 \end{cases}.$$

ქვემოთ მოცემულია ამ ფუნქციათა სქემატური გრაფიკები.



გამოიკვლიეთ თითოეული ეს ასახვა უწყვეტობაზე (მიუთითეთ თითოეული ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე).

როგორ შეიცვლება პასუხი იმ შემთხვევაში, თუ

ა) თითოეული ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე იქნება $\mathbb{R}_S$ – ზორგენფრეის წრფე (იხ. 4.9.10)?

ბ) თითოეული ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $\mathbb{R}_S$, მნიშვნელობათა სიმრავლე კი – $\mathbb{R}$ ?

გ) თითოეული ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $\mathbb{R}$, მნიშვნელობათა სიმრავლე კი – $\mathbb{R}_S$ ?

6.2.5.10. მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ასახვისა, რომლის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე მთელი $\mathbb{R}$ -ია.

6.2.5.11. მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ასახვისა, რომლის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ერთწერტილიანია.

6.2.5.12. სწორია თუ არა, რომ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ყოველი უწყვეტი ასახვისას ყოველი ღია სიმრავლის ანასახი ღიაა? პასუხი დაასაბუთეთ.

6.2.5.13. სწორია თუ არა, რომ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ყოველი უწყვეტი ასახვისას ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლის ანასახი ჩაკეტილია? პასუხი დაასაბუთეთ.

6.2.5.14. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f:X\to Y$ და $g:X\to Y$ – უწყვეტი ასახვებია, სადაც $X$ – ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $Y$ – ნებისმიერი ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცეა (იხ. 4.9.16), მაშინ, სიმრავლე

$$A=\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$$

ჩაკეტილია $X$ -ში[1] (ამ დებულების დამტკიცება მოყვანილია სქოლიოში, თუმცა სასურველია, მკითხველმა ის დამოუკიდებლად დაამტკიცოს).

[1] 6.2.5.14-ის დამტკიცება. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $X\setminus A$ ღიაა $X$ -ში (რის საფუძველზეც დავასკვნით, რომ თვითონ $A$ ჩაკეტილია $X$ -ში). ცხადია, რომ $X\setminus A=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\}$. განვიხილოთ ნებისმიერი $x_0\in X\setminus A\subset X$ წერტილი და ვაჩვენოთ, რომ მას გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც შედის $X\setminus A$-ში (იხ. 4.4.2). მართლაც, რადგან $x_0\in X\setminus A$, ამიტომ $f(x_0)\neq g(x_0)$. $Y$ -ის ჰაუსდორფობის გამო, არსებობს $f(x_0)$ წერტილის ისეთი $V_1$ მიდამო $Y$ -ში და $g(x_0)$ წერტილის ისეთი $V_2$ მიდამო $Y$ -ში, რომ $V_1\bigcap V_2=\varnothing$. აღვნიშნოთ: $U_1=f^{-1}(V_1)$ და $U_2=g^{-1}(V_2)$. $f$ -ისა და $g$ -ს უწყვეტობის თანახმად $U_1$ და $U_2$ – $X$ -ის ღია ქვესიმრავლეებია. აღვნიშნოთ: $U=U_1\bigcap U_2$. ცხადია, რომ $U$ ღიაა $X$ -ში და $x_0\in U_1\bigcap U_2$. ამრიგად, $U$ არის $x_0$ -ის მიდამო $X$ -ში. ვაჩვენოთ, რომ $U\subset X\setminus A$. ამისათვის, თავის მხრივ, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ ყოველი $x\in U$ -სათვის $f(x)\neq g(x)$. მართლაც, ვთქვათ $x\in U$. მაშინ $f(x)\in f(U)=f(U_1\bigcap U_2)\subset f(U_1)\subset V_1$. სავსებით ანალოგიურად გვექნება: $g(x)\in V_2$. მაგრამ $V_1\bigcap V_2=\varnothing$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $f(x)\neq g(x)$.

დებულება დამტკიცებულია.

6.2.5.15. ვთქვათ, $X$ – ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცეა, $Y$ – ნებისმიერი ჰაუსდორფის სივრცეა (იხ. 4.9.16), ხოლო $f: X \to Y$ და $g: X \to Y$ – უწყვეტი ასახვებია. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ $A$ არის $X$ -ის რაიმე ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე (იხ. 5.3.1) ისეთი, რომ ყოველი $x \in A$-სათვის $f(x) = g(x)$. დაამტკიცეთ, მაშინ, რომ $f = g$ (ანუ, $f(x) = g(x)$ ყოველი $x \in X$ -სათვის).

ეს დებულება (თეორემა), რომლის დამტკიცებაც მოცემულია სქოლიოში ქვემოთ[2] (და რომლის დამტკიცებაც მკითხველმა სასურველია დამოუკიდებლად ჩაატაროს), შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად: ტოპოლოგიურ სივრცეთა ყოველი უწყვეტი ასახვა მნიშვნელობებით ჰაუსდორფის სივრცეში ცალსახად განისაზღვრება მისი მნიშვნელობებით განსაზღვრის არის ნებისმიერ ყველგან მკვრივ ქვესიმრავლეზე, ან კიდევ ასე: ყოველ უწყვეტ ასახვას მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრციდან ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეში გააჩნია ერთადერთი უწყვეტი გაგრძელება მთელ მოცემულ სივრცეზე.

[2] 6.2.5.15-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $X$ --ის შემდეგი ქვესიმრავლე: $B = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ rom $B = X$. პირობის თანახმად $A \subset B$. იმის გამო, რომ $A$ – ყველგან მკვრივია $X$ -ში, ხოლო, 6.2.5.14-ის თანახმად, $B$ ჩაკეტილია $X$ -ში, გვექნება (იხ. 4.6.3): $X = \overline{A} \subset \overline{B} = B \subset X$. ამრიგად, $X \subset B \subset X$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $B = X$.

დებულება დამტკიცებულია.