§2. ფუნქცია (ასახვა)

2.1. ფუნქციის განმარტება.

ფუნქცია (ან, ასახვა) X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში ეწოდება შესაბამისობის ყოველ ისეთ f წესს, რომლის მიხედვითაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი[1].

X სიმრავლეს უწოდებენ f ფუნქციის **განსაზღვრის არეს**, Y სიმრავლეს კი – **მნიშვნელობათა სიმრავლეს**. Y სიმრავლის ის ერთადერთი y ელემენტი, რომელიც შეესაბამება X სიმრავლის x ელემენტს f ფუნქციის დროს, აღინიშნება $f(x)$-ით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქციას X სიმრავლის x ელემენტი გადაჰყავს Y სიმრავლის $y = f(x)$ ელემენტში, ან რომ x ელემენტი f-ით აისახება (ან გადმოდის) y-ზე.

იმის აღსანიშნავად, რომ f არის X ფუნქცია სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, წერენ:

$$f : X \to Y .$$

ისეთ ფუნქციებს, რომელთა მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (ან მისი რაიმე ქვესიმრავლეა), ნამდვილ ფუნქციებს უწოდებენ, ხოლო ისეთ ნამდვილ ფუნქციებს, რომელთა განსაზღვრის არეც ასევე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა, ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებს უწოდებენ.

ფუნქცია, ანუ შესაბამისობის წესი X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, შეიძლება აღწერილი იყოს სიტყვებით, ან (ბევრ შემთხვევაში) ფორმულის საშუალებით, ან რაიმე სხვა გზით.

2.2. ფუნქციათა ტოლობა.

ორ $f_1 : X_1 \to Y_1$ და $f_2 : X_2 \to Y_2$ ფუნქციას ეწოდება **ტოლი**, თუ $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ და ყოველი $x \in X_1 = X_2$-სათვის $f_1(x) = f_2(x)$. ასეთ შემთხვევაში წერენ: $f_1 = f_2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში წერენ: $f_1 \neq f_2$.

2.3. ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციის გრაფიკი.

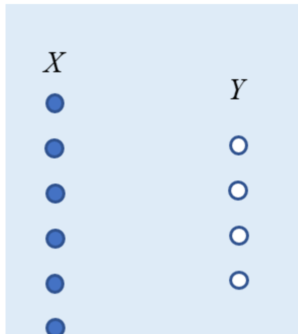
ვთქვათ, მოცემულია ფიქსირებული საკოორდინატო სიბრტყე და ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი $f : X \to Y$ ფუნქცია. f ფუნქციის **გრაფიკი** ეწოდება ამ საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე

[1] „შესაბამისობის წესი“, რომელიც ფიგურირებს ამ განმარტებაში, არ არის მკაცრად განმარტებული მათემატიკური ობიექტი. თუ მთლად ზუსტად ვილაპარაკებთ, X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში ფუნქცია (ასახვა) ეს არის $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის ყოველი ისეთი Γ ქვესიმრავლე, რომელსაც გააჩნია შემდეგი ორი თვისება: (ა) X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს Y სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ წყვილი (x, y) ეკუთვნის Γ-ს და (ბ) თუ $(x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma \subset X \times Y$, მაშინ $y_1 = y_2$. თუმცა (წმინდა პედაგოგიური მოსაზრებიდან გამომდინარე), პირველ ხანებში, ალბათ უმჯობესია, მხედველობაში გვქონდეს ზემოთ მოცემული განმარტება.

ნამდვილ რიცხვთა ყველა იმ დალაგებული (x,y) წყვილების შესაბამისი წერტილების[2] სიმრავლეს, სადაც $x \in X$ და $y = f(x)$.

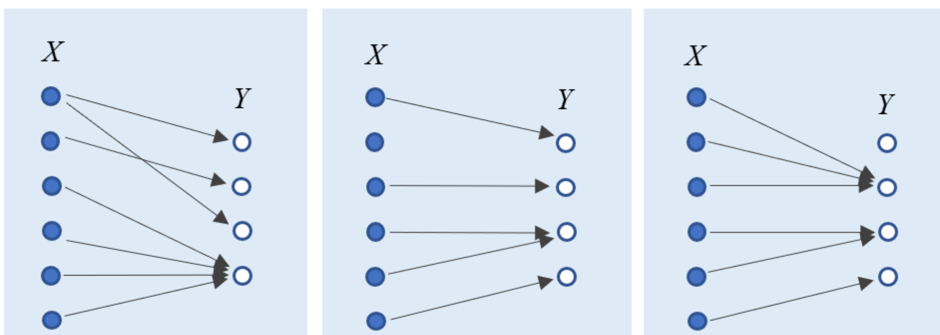
2.3. მაგალითები.

2.3.1. ვთქვათ, X არის სიბრტყის ლურჯი ფერით მონიშნული წერტილების 6-ელემენტიანი სიმრავლე, Y კი – თეთრი ფერით მონიშნული წერტილების 4-ელემენტიანი სიმრავლე (იხ. ნახ. 2).



ნახაზი 1

ქვემოთ მოცემულ ნახაზებზე ისრების საშუალებით აღწერილია თითო შესაბამისობის წესი ამ X სიმრავლიდან ამ Y სიმრავლეში.



ნახაზი 1(ა) ნახაზი 1(ბ) ნახაზი 1(გ)

1(ა) ნახაზზე აღწერილი შესაბამისობის წესი არ წარმოადგენს ფუნქციას X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, რადგან ამ წესის მიხედვით X სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს (კერძოდ, „ზემოდან“ პირველს) შეესაბამება Y სიმრავლის ორი (განსხვავებული) ელემენტი („ზემოდან“ პირველი და „ზემოდან“ მესამე).

არც 1(ბ) ნახაზზე აღწერილი შესაბამისობის წესია ფუნქცია, რადგან X სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს (კერძოდ, „ზემოდან“ მეორეს) არ შეესაბამება Y სიმრავლის არცერთი ელემენტი.

რაც შეეხება 1(გ) ნახაზზე აღწერილ შესაბამისობის წესს, ის არის ფუნქცია, რადგან X სიმრავლეში არ არის დარჩენილი არცერთი ისეთი ელემენტი, რომელსაც არ შეესაბამებოდეს Y სიმრავლის

[2] ქვემოთ, ყველგან, საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებს გავაიგივებთ ხოლმე ამ წერტილების შესაბამის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებთან. ანუ, გრაფიკის წერტილებად ხშირად ჩავთვლით არა საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებს, არამედ მათ შესაბამის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს.

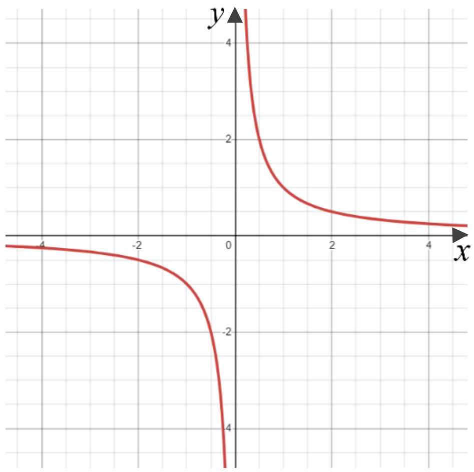
რომელიმე ელემენტი და ამასთან, X სიმრავლის თითოეულ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტი. შევნიშნოთ, რომ, ამ შემთხვევაში, Y სიმრავლეში არის ისეთი ელემენტი, რომელზეც X სიმრავლის არცერთი ელემენტი არ აისახება (რაც არ ეწინააღმდეგება ფუნქციის განმარტებას).

2.3.2. მათემატიკის სასკოლო კურსის ფარგლებში შეისწავლება ე. წ. ელემენტარული ფუნქციები (წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი, ტრიგონომეტრიული, შექცეული ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული). თითოეული ეს ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით. მაგალითად, $f(x)=x^2$ (ან $y=x^2$) ფორმულით მოცემულია კვადრატული ფუნქცია. მაგრამ, რომელია ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე? ან, რომელია შესაბამისობის ის წესი, რომელიც განსაზღვრავს ამ ფუნქციას?

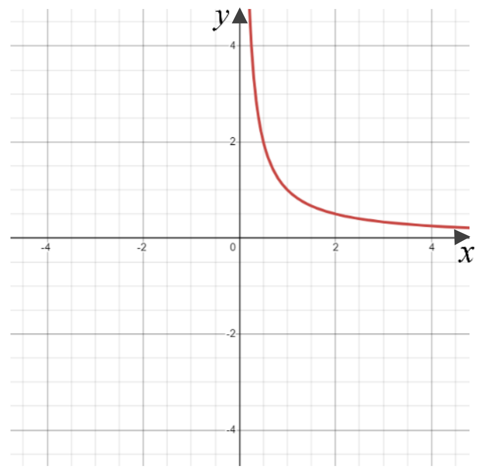
პირველ რიგში აღვნიშნავთ, რომ საზოგადოდ, როცა ლაპარაკია ფორმულით მოცემულ ნამდვილ ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებზე, არსებობს ასეთი შეთანხმება: თუ განსაზღვრის არე სპეციალურად არ არის მითითებული, იგულისხმება, რომ ასეთად მიჩნეულია ე. წ. მაქსიმალური განსაზღვრის არე, ანუ ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც ფორმულაში ტოლობის ერთ მხარეს მდგომ ცვლადის შემცველ გამოსახულებას აზრი აქვს; რაც შეეხება მნიშვნელობათა სიმრავლეს, აქ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

დავუბრუნდეთ ისევ $f(x)=x^2$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას. ზემოაღნიშნული შეთანხმების თანახმად, ამ ფორმულით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რადგან გამოსახულებას „x^2" აზრი აქვს ყოველი ნამდვილი „x" რიცხვისათვის), მნიშვნელობათა სიმრავლე კი ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა (ყოველი ნამდვილი რიცხვის კვადრატი კვლავ ნამდვილი რიცხვია). შესაბამისობის წესი, ამ შემთხვევაში, გახლავთ კვადრატში ახარისხება: ყოველ ნამდვილ რიცხვს ეს ფუნქცია უთანადებს ამ რიცხვის კვადრატს. კერძოდ, რიცხვ 2-ს შეესაბამება რიცხვი 4 ($f(2)=4$), $\sqrt{3}$-ს – 3 ($f(\sqrt{3})=3$), 0-ს – 0 ($f(0)=0$), $\left(-\frac{1}{2}\right)$-ს – $\frac{1}{4}$ ($f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$) და ა. შ. ამ ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც, როგორც ცნობილია, პარაბოლა ეწოდება, შედგება ყველა (x,x^2) ტიპის წერტილებისაგან, სადაც $x\in\mathbb{R}$.

2.3.3. ზემოაღნიშნული შეთანხმების მიხედვით, $y=\frac{1}{x}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ სიმრავლე; მისი გრაფიკი 2(ა) ნახაზზეა გამოსახული. თუმცა, თუ განსაზღვრის არედ $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ სიმრავლის ნაცვლად გამოვაცხადებთ $(0;+\infty)$ სიმრავლეს, მაშინ ამავე $y=\frac{1}{x}$ ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქცია (რომლის გრაფიკიც მოცემულია 2(ბ) ნახაზზე), არ იქნება წინა ფუნქციის ტოლი (რადგან ამ ფუნქციებს განსხვავებული განსაზღვრის არეები აქვთ).

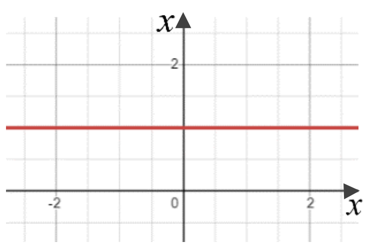


ნახაზი 2(ა)

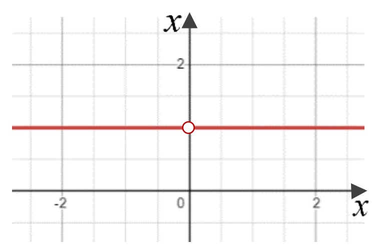


ნახაზი 2(ბ)

2.3.4. განვიხილოთ $f(x)=1$ და $g(x)=x\cdot\frac{1}{x}$ ფორმულებით მოცემული ფუნქციები. ცხადია, $f\neq g$, რადგან f-ის განსაზღვრის არეა $\mathbb{R}$, g ფუნქციისა კი – $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (მათი გრაფიკები მოცემულია, შესაბამისად, 3(ა) და 3(ბ) ნახაზებზე[3]).



ნახაზი 3(ა)



ნახაზი 3(ა)

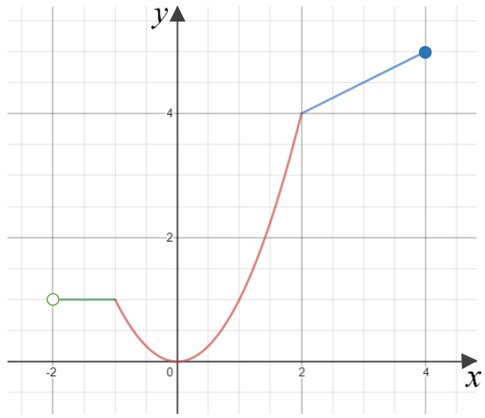
2.3.5. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს „უბან-უბან“. მაგალითად, განვიხილოთ ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია („უბან-უბან“) შემდეგი წესის მიხედვით:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } -2<x\leq -1\\ x^2, & \text{თუ } -1<x<2\\ 0,5x+3, & \text{თუ } 2\leq x\leq 4\end{cases}$$

ეს ფუნქცია ყოველი x-სათვის, რომელიც ეკუთვნის $(-2;-1]$ შუალედს, ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას, ყოველი x-სათვის, რომელიც ეკუთვნის $(-1;2)$ შუალედს – x^2 -ის ტოლ მნიშვნელობას და ყოველი x-სათვის, რომელიც ეკუთვნის $[2;4]$ $(0,5x+3)$-ის ტოლ შუალედს – მნიშვნელობას. სხვა არცერთი ნამდვილი x-სათვის ეს ფუნქცია განსაზღვრული არ

[3] თეთრად მონიშნული წერტილი გრაფიკს არ ეკუთვნის.

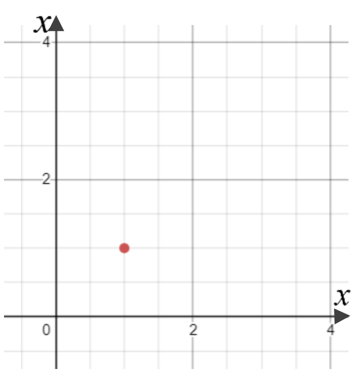
არის. ამიტომ, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე: $(-2;-1] \cup (-1;2) \cup (-2;4] = (-2;4]$. მისი გრაფიკი მოცემულია მე-4 ნახაზზე[4].



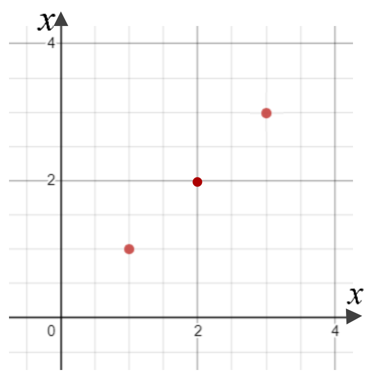
ნახაზი 4

2.3.6. განვიხილოთ სამი $f:\{1\} \to \mathbb{R}$, $g:\{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ და $h:[1;+\infty) \to \mathbb{R}$ ფუნქცია რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგი წესის მიხედვით: ყოველი მათგანი თავისი განსაზღვრის არის შემადგენელ ყოველ რიცხვს ამავე რიცხვს უთანადებს.

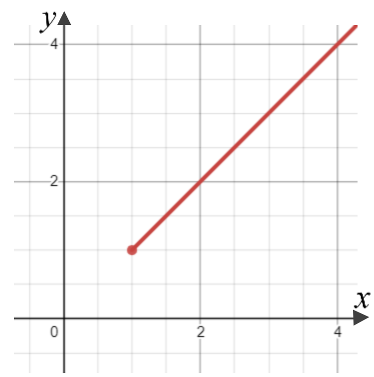
მაშინ, f ფუნქციის გრაფიკი 1-წერტილიანი იქნება და ეს ერთადერთი წერტილია $(1, 1)$ (იხ. ნახ. 5(ა)), g ფუნქციის გრაფიკი შედგება სამი – (1, 1), (2, 2), (3, 3) – წერტილისაგან (იხ. ნახაზი 5(ბ)), ხოლო h ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს უსასრულო (ჩაკეტილ) სხივს (იხ. ნახაზი 5(გ)).



ნახაზი 5(ა)



ნახაზი 5(ბ)



ნახაზი 5(გ)

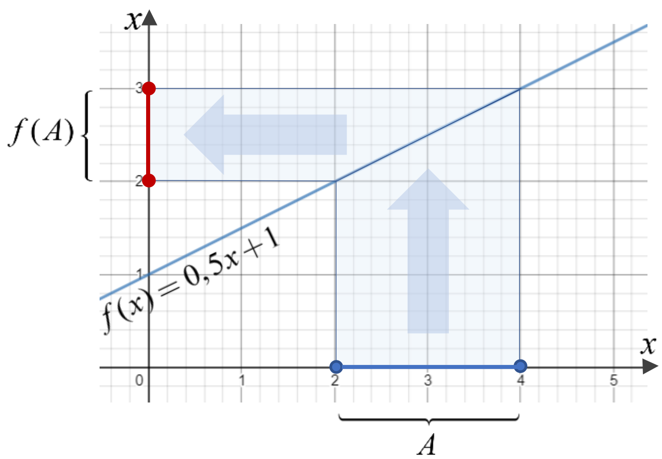
[4] როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თეთრი ფერით მონიშნული წერტილი არ ეკუთვნის ამ გრაფიკს, მუქი ფერით მონიშნული წერტილი კი – ეკუთვნის (ასეთ აღნიშვნებს ქვემოთ არაერთხელ გამოვიყენებთ).

2.4. განსაზღვრის არის ქვესიმრავლის ანასახი.

ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში რაიმე $f: X \to Y$ ასახვა და ვთქვათ, $A \subset X$. A სიმრავლეში შემავალი თითოეული x ელემენტი გადავსახოთ Y-ში f ასახვით. ამის შედეგად მიღებული y-ების სიმრავლე აღვნიშნოთ $f(A)$ სიმბოლოთი (ცხადია, $f(A)$ – Y სიმრავლის ქვესიმრავლეა). ამ სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის **ანასახი** Y სიმრავლეში (f ასახვის დროს). $f(A)$ სიმრავლის ზუსტი განმარტება ასეთია:

$$f(A) = \{y \,|\, y \in Y \text{ და არსებობს (ერთი მაინც) ისეთი } x \in X \text{, რომ } f(x) = y\}.$$

მაგალითად, თუ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ განსაზღვრულია ფორმულით: $f(x) = 0,5x + 1$, მაშინ $f([2;4]) = [2;3]$ (იხ. ნახაზი 6).



ნახაზი 6

2.7. ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f: X \to Y$ **ფუნქციის მნიშვნელობათა არე** ვუწოდოთ Y სიმრავლის $f(X)$ ქვესიმრავლეს.

მაგალითად, $f(x) = x^2$ ფორმულით განსაზღვრული $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა სიმრავლე: $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty)$. შეამოწმეთ!

2.6. მნიშვნელობათა სიმრავლის ქვესიმრავლის წინა სახე.

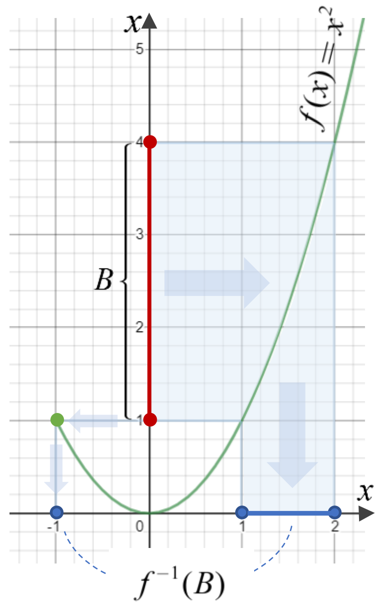
ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში რაიმე $f: X \to Y$ ასახვა და ვთქვათ, $B \subset Y$. X სიმრავლის ყველა იმ x ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც f-ს გადაჰყავს B სიმრავლეში, აღინიშნება $f^{-1}(B)$ სიმბოლოთი და ამ სიმრავლეს (რომელიც, ცხადია, X სიმრავლის ქვესიმრავლეა) ეწოდება B სიმრავლის **წინა სახე** f ასახვის დროს. ქვემოთ მოგვყავს $f^{-1}(B)$ სიმრავლის ზუსტი განმარტება.

$$f^{-1}(B)=\{x|x\in X \text{ და } f(x)\in B\}.$$

მაგალითად, თუ $f:[-1;+\infty)\to\mathbb{R}$ განსაზღვრულია ფორმულით: $f(x)=x^2$, მაშინ $f^{-1}([1;4])=\{-1\}\cup[1;2]$ (იხ. ნახაზი 7).

2.7. ინექციური ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f:X\to Y$ ასახვას ეწოდება ინექციური ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **ინექცია**, თუ X სიმრავლის ყოველი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული x_1 და x_2 ელემენტისათვის სამართლიანია უტოლობა: $f(x_1)\neq f(x_2)$.



ნახაზი 7

მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფორმულით განსაზღვრული $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქცია ინექციაა (რადგან ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვების კუბებიც განსხვავებულია). $f(x)=x^4$, $f(x)=\sin x$ და $f(x)=1$ ფორმულებით $\mathbb{R}$-დან $\mathbb{R}$-ში განსაზღვრული ფუნქციებიდან კი არცერთი არ არის ინექცია. მართლაც, $(-1)\neq 1$, მაგრამ $(-1)^4=1=1^4$; ასევე, $\frac{\pi}{2}\neq\frac{5\pi}{2}$, მაგრამ $\sin\frac{\pi}{2}=1=\sin\frac{5\pi}{2}$, რაც შეეხება მესამე ფუნქციას, აქ ყველაფერი ნათელია.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)=x^4$ ფორმულით $[0;+\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქცია ინექციაა. რატომ? ასევე, $f(x)=\sin x$ ფორმულით $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქციაც ინექციაა. შეამოწმეთ! თუმცა, არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ ელემენტს, ისეთი, რომ მასზე $f(x)=1$ ფორმულით განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქცია იყოს ინექცია. შეამოწმეთ!

2.8. სურექციული ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f:X\to Y$ ასახვას ეწოდება სურექციული ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **სურექცია**, თუ Y სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის (ერთი მაინც) ისეთი x ელემენტი, რომ $f(x)=y$.

მაგალითად, ასახვა $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, სადაც ყოველი $x\in\mathbb{R}$-სათვის $f(x)=2x-1$, სურექციულია, რადგან ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$-სათვის $f(x)=y$, სადაც $x=\frac{y+1}{2}$. შეამოწმეთ!

ასახვა $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, სადაც ყოველი $x\in\mathbb{R}$-სათვის $f(x)=\cos x$ არ არის სურექცია, რადგან, მაგალითად, $\mathbb{R}$ სიმრავლის $y=2$ ელემენტისათვის არ მოიძებნება ისეთი $x\in\mathbb{R}$ ელემენტი, რომ სამართლიანი იყოს ტოლობა: $f(x)=y$. რატომ?

აქვე შევნიშნავთ, რომ $f(x)=\cos x$ ფორმულით განსაზღვრული $f:\mathbb{R}\to[-1;1]$ ასახვა, სურექციაა. მართლაც ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$ -სათვის $f(x)=y$ თუ $x=\arccos y$. არსებობს კიდევ სხვა ასეთი x?

2.9. ბიექციური ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f:X\to Y$ ასახვას ეწოდება ბიექციური ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **ბიექცია**, თუ f ინექციაცაა და სურექციაც[5]. X და Y სიმრავლეებს უწოდებენ ერთმანეთის ბიექციურ სიმრავლეებს თუ არსებობს ერთი მაინც ბიექცია X -დან Y -ზე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ X და Y – ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

$f(x)=x^2$ ფორმულით მოცემული $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქცია არ არის ბიექცია, რადგან ის არ არის, მაგალითად, ინექცია (შევნიშნოთ, რომ ეს ასახვა არც სურექციაა). შეამოწმეთ!

$f(x)=x^2$ ფორმულით მოცემული $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ ფუნქცია არ არის ბიექცია, რადგან ის არ არის, სურექცია (თუმცა არის ინექცია). შეამოწმეთ!

$f(x)=x^2$ ფორმულით მოცემული $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ ფუნქცია უკვე არის ბიექცია, რადგან ის ინექციაცაა და სურექციაც.

2.10. შექცეული (შებრუნებული) ასახვა.

ბიექციური ასახვებისთვის (და მხოლოდ მათთვის) განიმარტება შექცეული (ან, რაც იგივეა, შებრუნებული) ასახვები. უფრო ზუსტად, ვთქვათ, $f:X\to Y$ – ნებისმიერი ბიექციური ასახვაა. საზოგადოდ შეიძლება არსებობდეს უამრავი ასახვა Y სიმრავლიდან X სიმრავლეში. ჩვენ ახლა (f ასახვის საშუალებით) ავაგებთ გარკვეულ ასახვას Y -დან X -ში, რომელსაც ეწოდება მოცემული (ბიექციური) f ასახვის **შექცეული (ან, შებრუნებული) ასახვა** და რომელიც აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი.[6]

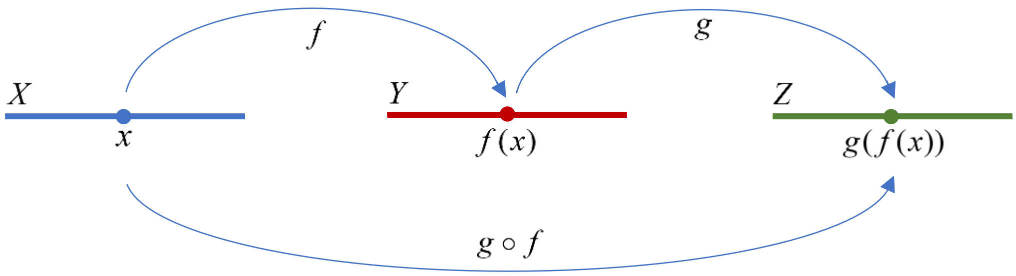
ამისათვის, განვიხილოთ Y სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტი. რადგან f ბიექციაა, ის, კერძოდ, სურექციაცაა. ამიტომ არსებობს ისეთი $x\in X$, რომ $f(x)=y$. ახლა შევნიშნოთ, რომ ასეთი x ერთადერთია. წინააღმდეგ შემთხვევაში f აღარ იქნება ინექციური და, მით უმეტეს, ბიექციური ასახვა. ამრიგად, ყოველი $y\in Y$ ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის ერთადერთი ისეთი x ელემენტი, რომ $f(x)=y$. სწორედ ეს ერთადერთი x მივიჩნიოთ $y\in Y$ ელემენტის შესაბამის ელემენტად $f^{-1}:Y\to X$ ასახვის დროს.

მაგალითად, მარტივად მოწმდება, რომ $f:(-\infty;0]\to[0;+\infty)$ ასახვა, რომელიც განმარტებულია $f(x)=x^2$ ფორმულით, ბიექციაა. შეამოწმეთ, რომ $f^{-1}:[0;+\infty)\to(-\infty;0]$ ასახვა მოიცემა შემდეგი ფორმულით: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$.

[5] ასეთ ასახვებს ურთიერთცალსახა ასახვებსაც უწოდებენ.
[6] არ უნდა აგვერიოს 2.6 პუნქტში მიღებულ აღნიშვნაში.

2.11. ასახვათა კომპოზიცია.

განვიხილოთ ისეთი ორი $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$ ასახვა, რომ f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე ემთხვევა g ასახვის განსაზღვრის არეს. ყოველი ასეთი ორი ასახვის საშუალებით განიმარტება ასახვა X სიმრავლიდან Z სიმრავლეში, რომელიც აღინიშნება $g\circ f$ სიმბოლოთი და რომელსაც f-ისა და g-ს **კომპოზიცია** ეწოდება. ეს განმარტება ასეთია: X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის $g\circ f(x)=g(f(x))$ (იხ. სქემა მე-8 ნახაზზე).



ნახაზი 8

მაგალითად, ვთქვათ, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ და $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, შესაბამისად, $f(x)=x^2$ და $g(x)=x+1$ ფორმულებით განსაზღვრული ორი ასახვაა. მაშინ, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ და $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ კომპოზიციები განსაზღვრული იქნება, შესაბამისად, $g\circ f(x)=x^2+1$ და $f\circ g(x)=(x+1)^2$ ფორმულებით.

2.11.1. თეორემა. თუ $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$ ინექციური ასახვებია, მაშინ მათი $g\circ f:X\to Z$ კომპოზიციაც ინექციური ასახვაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ X სიმრავლის ნებისმიერი ისეთი ორი $x_1,x_2\in X$ ელემენტი, სადაც $x_1\neq x_2$. რადგან f ინექციაა, ამიტომ $f(x_1)\neq f(x_2)$ და რადგან g-ც ინექციაა, გვექნება: $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$. მაგრამ $g(f(x_1))=g\circ f(x_1)$ და $g(f(x_2))=g\circ f(x_2)$. ამრიგად, $g\circ f(x_1)\neq g\circ f(x_2)$ და ე. ი. $g\circ f$ – ინექციაა.

2.11.2. თეორემა. თუ $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$ სურექციული ასახვებია, მაშინ მათი $g\circ f:X\to Z$ კომპოზიციაც სურექციული ასახვაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ Z სიმრავლის ნებისმიერი $z\in Z$ ელემენტი. რადგან g – სურექციაა, არსებობს ისეთი $y\in Y$ ელემენტი, რომ $g(y)=z$. რადგან f-ც სურექციაა, არსებობს ისეთი $x\in X$, , რომ $f(x)=y$. მაშინ, გვექნება: $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z$. ამრიგად, $g\circ f$ – სურექციაა.

2.11.3. შედეგი. თუ $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$ ბიექციური ასახვებია, მაშინ მათი $g\circ f:X\to Z$ კომპოზიციაც ბიექციური ასახვაა.

დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს 2.11.1-დან და 2.11.2-დან.

2.11.4. **თეორემა**. ყოველი ბიექციის შექცეული ასახვა ასევე ბიექციაა.

დამტკიცება ჩაატარეთ დამოუკიდებლად.

2.11.5. განმარტება. X სიმრავლის თავის თავზე ასახვას, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს უთანადებს ამავე x ელემენტს, X სიმრავლის თავის თავზე იგივური ასახვა ეწოდება და აღინიშნება id_X სიმბოლოთი. ამრიგად (განმარტების თანახმად), ყოველ $x \in X$-სათვის $id_X(x) = x$.

2.11.5. **თეორემა**. ყოველი ბიექციური $f : X \to Y$ ასახვისათვის სამართლიანია შემდეგი:

$$f^{-1} \circ f = id_X \text{ და } f \circ f^{-1} = id_Y .$$

დამტკიცება ჩაატარეთ დამოუკიდებლად.

2.12. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები.

2.12.1. X სიმრავლეს ეწოდება **თვლადი**, თუ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლის ერთი მაინც $f : \mathbb{N} \to X$ ბიექცია ამ X სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ თვითონ $\mathbb{N}$ სიმრავლე თვლადია. რატომ?

უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც არ არის თვლადი, **არათვლად** სიმრავლეს უწოდებენ.

ვთქვათ, X – რაიმე თვლადი სიმრავლეა, ანუ არსებობს ბიექცია: $f : \mathbb{N} \to X$. მაშინ, ცხადია, $X = \{ f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$. ავირჩიოთ ლათინური ანბანის რომელიმე ასო, მაგალითად, „x“ და (ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სათვის) $f(n)$-ის ნაცვლად დავწეროთ: x_n. მაშინ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n ...\}$. ამრიგად, ყოველი თვლადი სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია „გადავნომროთ“ ნატურალური რიცხვების საშუალებით.

2.12.2. თუ არსებობს ბიექცია $f : \mathbb{N} \to X$, მაშინ არსებობს $g : X \to \mathbb{N}$ ბიექციაც: g-ს როლში შეგვიძლია განვიხილოთ, მაგალითად, f^{-1} ასახვა (იხ 2.11.4).

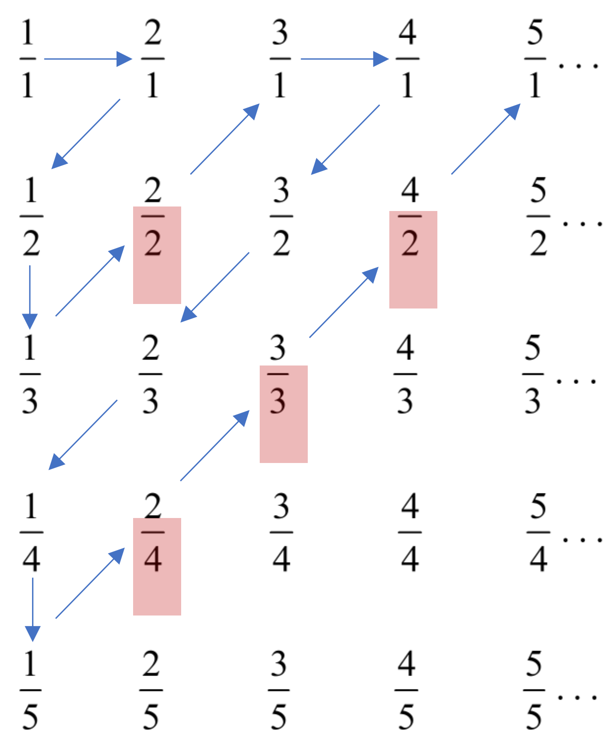
2.12.3. ყველა მთელ დადებით ლუწ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, რადგან, მაგალითად, ასახვა $f : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ სადაც ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სათვის $f(n) = 2n$, ბიექციაა. ანალოგიურად, ასახვა $f(n) = 2n - 1$ წარმოადგენს ბიექციას $\mathbb{N}$-დან ყველა კენტ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე (ანუ, ყველა კენტ რიცხვთა $\{1, 3, 5, ..., 2n - 1, ...\}$ სიმრავლეც თვლადია).

2.12.4. ყველა რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე თვლადია. მართლაც, ჯერ ვაჩვენოთ რომ ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია (აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე $\mathbb{Q}_+$-ით).

განვიხილოთ შემდეგი „უსასრულო“ ცხრილი:

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1}\dots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2}\dots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\dots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4}\dots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5}\dots \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{array}
$$

ამ ცხრილის პირველ სტრიქონში თანმიმდევრობით ჩამოწერილია ყველა ის დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 1-ის ტოლია, მე-2 სტრიქონში – ყველა ის რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 2-ის ტოლია, მე-3 სტრიქონში – ყველა ის რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 3-ის ტოლია და ა. შ. ცხადია, ყოველი სტრიქონი უსასრულოა და სტრიქონების „რაოდენობაც" უსასრულოა („თვლადია"). ამასთან, ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი გვხვდება უსასრულო „რაოდენობის" სტრიქონებში. მაგალითად, რიცხვი 1 გვხვდება ყველა სტრიქონში (ცხრილის „დიაგონალზე"), რიცხვი $\frac{1}{2}$ გვხვდება ზემოდან მე-2, მე-4, მე-6 და ა. შ. სტრიქონებში და ა. შ.



ქვემოთ მოცემულ სქემაზე ისრებით ნაჩვენებია შესაბამისობის გარკვეული წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ცალსახად განსაზღვრული (დადებითი) რაციონალური რიცხვი. ეს წესი ასე უნდა გავიგოთ: ნატურალურ რიცხვ 1-ს შევუსაბამოთ პირველი სტრიქონის პირველი ელემენტი, ანუ რაციონალური რიცხვი $\frac{1}{1}=1$. შემდეგ უნდა „გავყვეთ" სქემაზე გამოსახულ ისრებს და ყოველ შემდეგ ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ ამ ცხრილში „ისრების მიმართულებით მოძრაობისას" პირველი შემხვედრი ის რაციონალური რიცხვი, რომელიც აქამდე არ „შეგვხვედრია". ასე, მაგალითად, 2-ს ამ წესით შეესაბამება რიცხვი $\frac{2}{1}=2$, 3-ს შეესაბამება რიცხვი $\frac{1}{2}$, 4-ს შეესაბამება $\frac{1}{3}$.

ვნახოთ რომელი რიცხვი შეესაბამება 5-ს. $\frac{1}{3}$-ის შემდეგ, სქემის მიხედვით, „მოდის“ რიცხვი $\frac{2}{2}=1$ რომელიც უკვე შეგვხვდა ზემოთ ერთ-ერთ (კერძოდ, პირველ) სტრიქონში. ამიტომ $\frac{2}{2}$-ს „ვტოვებთ“, გადავდივართ (ისრების მიმართულებით) შემდეგ რიცხვზე (ანუ $\frac{3}{1}$-ზე), რომელიც აქამდე არ შეგვხვედრია და 5-ს შევუსაბამებთ სწორედ ამ რაციონალურ რიცხვს (ანუ, $\frac{3}{1}=3$-ს). ამ პროცესს ვაგრძელებთ უსასრულოდ.

რომელი რაციონალური რიცხვები შეესაბამება ამ წესით 6-ს? 7-ს? 8-ს? 9-ს? 10-ს? 11-ს? (წითელი ფერით ამ ცხრილში მონიშნულია პირველი რამდენიმე რაციონალური რიცხვი, რომლებიც უნდა გამოვტოვოთ ისრების მიმართულებით „მოძრაობისას“).

ცხადია, აღწერილი წესის მიხედვით, ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი (დადებითი) რაციონალური რიცხვი. მაშასადამე, ეს წესი წარმოადგენს ფუნქციას $\mathbb{N}$-დან $\mathbb{Q}_+$-ში. ამასთან ნათელია, რომ ეს ფუნქცია ყოველ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ნატურალურ რიცხვს უთანადებს განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვებს, ანუ, რომ ეს ასახვა ინექციაა. გარდა ამისა, ყოველი (დადებითი) რაციონალური რიცხვი სადღაც (და თან არაერთგზის) გვხვდება ამ ცხრილში; ამასთან, აღწერილი წესი ისეთია, რომ სასრული ნაბიჯების შემდეგ აუცილებლად „მივადგებით“ ამ რიცხვს. ამიტომ ეს ასახვა სურექციაცაა. მაშასადამე, აღწერილი ასახვა ბიექციაა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეც თვლადია. მართლაც, რადგან ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ეს რიცხვები შეგვიძლია „გადავნომროთ“ ნატურალური რიცხვებით: $\mathbb{Q}_+=\{r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\}$. ამოვწეროთ $\mathbb{Q}_+$ სიმრავლის ელემენტები უსასრულო სტრიქონის სახით:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

ამ სტრიქონში r_1-ს მარცხნიდან მივუწეროთ რიცხვი 0, შემდეგ 0-ს მარცხნიდან მივუწეროთ r_1-ის მოპირდაპირე რიცხვი $(-r_1)$, შემდეგ $(-r_1)$-ს მარცხნიდან მივუწეროთ r_2-ის მოპირდაპირე რიცხვი $(-r_3)$ და ასე გავაგრძელოთ უსასრულოდ. მივიღებთ რიცხვების სტრიქონს, რომელიც უსასრულოდ გრძელდება როგორც მარცხნივ, ისე მარჯვნივ:

$$\ldots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

შევნიშნოთ რომ ამ (ორივე მხრივ უსასრულო) სტრიქონში ჩაწერილი ყოველი რიცხვი რაციონალურია. ამასთან, ყოველი რაციონალური რიცხვი გვხვდება ამ სტრიქონში (თანაც, ზუსტად ერთხელ). სხვა სიტყვებით, $\mathbb{Q}=\{\ldots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\}$.

ახლა $\ldots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ სტრიქონში ამოწერილი რიცხვები გადავნომროთ ნატურალური რიცხვებით, ანუ, ყოველ ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ აღნიშნულ სტრიქონში ჩაწერილი ცალსახად განსაზღვრული (რაციონალური) რიცხვი. შესაბამისობის ერთ-ერთი ასეთი წესი (რომელიც წარმოადგენს ბიექციას $\mathbb{N}$-სა $\mathbb{Q}$-ზე) აღწერილია სქემაზე ქვემოთ:

$$\begin{array}{lccccccccccc} \mathbb{N} & \dots & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Q} & \dots & -r_4 & -r_3 & -r_2 & -r_1 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots \end{array}$$

2.12.5. დავამტკიცოთ, რომ სიმრავლე $(0;1)$ (და მით უმეტეს $\mathbb{R}$) არათვლადია. ეს დებულება ცნობილია კანტორის თეორემის სახელწოდებით და მტკიცდება „კანტორის დიაგონალური მეთოდის“ საშუალებით. ქვემოთ მოგვყავს ეს დამტკიცება.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ყოველი ირაციონალური რიცხვი $(0;1)$ ღია ინტერვალიდან შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ხოლო ყოველი რაციონალური რიცხვი – სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით. ამასთან, ყოველ სასრულ ათწილადსაც $(0;1)$ ინტერვალიდან შეგვიძლია შევხედოთ როგორც უსასრულო ათწილადს, სადაც რომელიღაც ათწილადი ნიშნიდან დაწყებული, სულ 0-ები გვხვდება ან ისეთ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რომლის პერიოდი 9-ის ტოლია (რაღაც ადგილიდან დაწყებული სულ 9-იანები მეორდება)[7]. იმისათვის რომ ეს ორაზროვნება ავიცილოთ, მსჯელობაში ქვემოთ ეს უკანასკნელი შემთხვევა გამოვრიცხოთ.

ახლა დავიწყოთ კანტორის თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ, საწინააღმდეგო, ვთქვათ $(0;1)$ თვლადია. მაშინ (იხ. 2.12.1) $(0;1)$ სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია გადავნომროთ ნატურალური რიცხვების საშუალებით, ანუ, ეს სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით: $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

ყოველი x_n-სათვის (რომლის მთელი ნაწილიც, ცხადია, 0-ის ტოლია) შესაძლებელია დავაფიქსიროთ მისი წარმოდგენა უსასრულო ათწილადის სახით. ვთქვათ, ეს წარმოდგენაა: $x_n = 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4}...\alpha_{nn}...$, სადაც ყოველი k-სათვის α_{nk} აღნიშნავს x_n-ის წარმოდგენაში k-ურ ათწილად ნიშანს (მძიმის შემდეგ).

ჩამოვწეროთ ეს რიცხვები ერთმანეთის ქვემოთ სვეტის სახით:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, \boxed{\alpha_{11}}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \ \dots \ \alpha_{1n}\dots \\ x_2 = 0, \alpha_{21}\boxed{\alpha_{22}}\alpha_{23}\alpha_{24}\dots\alpha_{2n}\dots \\ x_3 = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\boxed{\alpha_{33}}\alpha_{34}\dots\alpha_{3n}\dots \\ x_4 = 0, \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\boxed{\alpha_{44}}\dots\alpha_{4n}\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4}\dots\boxed{\alpha_{nn}}\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

[7] მაგალითად, სასრული ათწილადი $0{,}1$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც $0{,}10000\dots$ უსასრულო ათწილადის, ისე $0{,}09999\dots$ უსასრულო ათწილადის სახით.

ჩვენი დაშვების თანახმად, ამ სვეტში ჩამოწერილი რიცხვები უნდა ამოწურავდნენ მთელ $(0;1)$ ღია ინტერვალს.

ახლა დავაკვირდეთ „დიაგონალზე“ მდგომ ათწილად ნიშნებს (რომლებიც წითელი ფერითაა მონიშნული და განვიხილოთ რიცხვი: $x = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\dots\beta_n\dots$ რომლის (უსასრულო) ათწილად წარმოდგენაში n-ური ათწილადი ნიშანი $\beta_n = 5$, თუ $\alpha_{nn} \neq 5$ და $\beta_n = 4$, თუ $\alpha_{nn} = 5$.

ერთი მხრივ, ცხადია, რომ ეს $x \in (0;1)$ და ამიტომ ის უნდა ფიგურირებდეს $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ ჩამონათვალში. მეორე მხრივ კი, აგების თანახმად, ეს რიცხვი არ უდრის არც ერთ რიცხვს ამ ჩამონათვალიდან. მაგალითად, x არ უდრის x_1-ს, რადგან განსხვავდება მათი პირველი ათწილადი ნიშნები მძიმის შემდეგ: $\beta_1 = 5$, თუ $\alpha_{11} \neq 5$ და $\beta_1 = 4$, თუ $\alpha_{11} = 5$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ 1-ზე მეტი ნებისმიერი n-სათვის $x \neq x_n$. ამიტომ, ეს x რიცხვი ვერ იქნება $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ ჩამონათვალში.

მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომელიც უჩვენებს იმას, რომ ჩვენი დაშვება $(0;1)$ სიმრავლის თვლადობის შესახებ არ არის მართებული.

ამრიგად, $(0;1)$ – არათვლადი სიმრავლეა.

2.13. ასახვის შეზღუდვა განსაზღვრის არის ქვესიმრავლეზე.

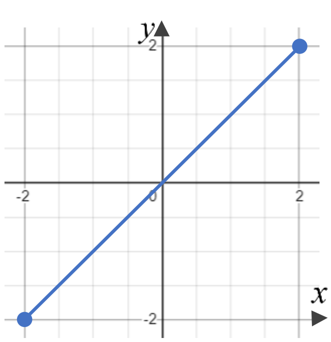
ვთქვათ, $f : X \to Y$ რაიმე ასახვაა და A არის ამ ასახვის X განსაზღვრის არის რაიმე ქვესიმრავლე: $A \subset X$. განვიხილოთ ასახვა A-დან Y-ში, რომელიც აღინიშნება $f|_A$ სიმბოლოთი და რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად: ყოველი $x \in A$-სათვის $(f|_A)(x) = f(x)$. ასე განმარტებულ

$$f|_A : A \to Y$$

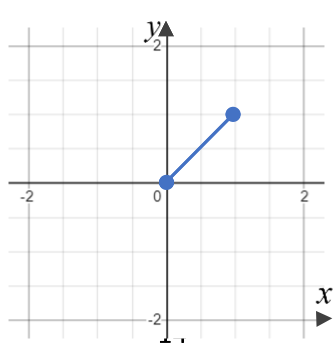
ასახვას ეწოდება f ასახვის **შეზღუდვა** მისი (f-ის) განსაზღვრის არის A ქვესიმრავლეზე.

ამრიგად, $f|_A : A \to Y$ ასახვა მოქმედებს ისევე როგორც f იმ განსხვავებით, რომ განსაზღვრის არედ მიჩნეულია არა მთელი X სიმრავლე, არამედ მისი A ქვესიმრავლე.

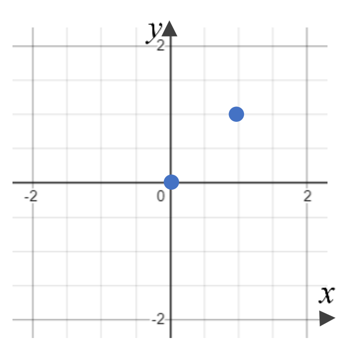
მე-9(ა) ნახაზზე მოცემულია $[-2;2]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x) = x$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. მე-9(ბ) ნახაზზე მოცემულია ამ ფუნქციის განსაზღვრის არის $[0;1]$ ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის გრაფიკი, ხოლო მე-9(გ) ნახაზზე აღნიშნული ფუნქციის განსაზღვრის არის $\{0,1\}$ ორწერტილიან ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის გრაფიკი.



ნახაზი 9(ა)



ნახაზი 9(ბ)



ნახაზი 9(ბ)

2.14. ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის პროექციები თანამამრავლებზე.

ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. ახლა ჩვენ განვმარტავთ ორ $pr_1 : X \times Y \to X$ და $pr_2 : X \times Y \to Y$ ასახვას, რომელთაგან პირველს ეწოდება $X \times Y$ სიმრავლის **პროექცია** X **-ზე** (ან, პირველი პროექცია) მეორეს კი – $X \times Y$ სიმრავლის **პროექცია** Y **-ზე** (ან, მეორე პროექცია).

განმარტების თანახმად, ყოველი $(x, y) \in X \times Y$ წყვილისათვის $pr_1(x, y) = x$ და $pr_2(x, y) = y$.

მაგალითად, ვთქვათ, $X = Y = [0;1]$. მაშინ, $pr_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) = \frac{1}{2}$ და $pr_2\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

2.15. მოცემული სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.

ვთქვათ, X – ნებისმიერი სიმრავლეა. როგორც აღვნიშნეთ (იხ. 1.4), $\mathcal{P}(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც დამტკიცებულია გეორგ კანტორის მიერ 1891 წელს.

თეორემა. არცერთი X სიმრავლისათვის არ არსებობს სურექციული და, მით უმეტეს, ბიექციური ასახვა X -დან $\mathcal{P}(X)$ -ზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ბიექციური ასახვა $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

განვიხილოთ X სიმრავლის ასეთი A ქვესიმრავლე:

$$A = \{x | x \in X \text{ და } x \notin f(x)\}.$$

ამრიგად, A სიმრავლე შედგება X სიმრავლის ყველა ისეთი x ელემენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული არ ეკუთვნის X -ის იმ ქვესიმრავლეს, რომელშიც f ასახვას გადაჰყავს ეს x ელემენტი. შევნიშნოთ, რომ თუ ისეთი $x \in X$, რომ $x \notin f(x)$ არ არსებობს, მაშინ A სიმრავლე ცარიელი იქნება, მაგრამ ყველა შემთხვევაში, A იქნება X -ის ქვესიმრავლე.

რადგან A არის X -ის ქვესიმრავლე, ამიტომ $A \in \mathcal{P}(X)$. მაშასადამე, იმის გამო, რომ (დაშვების თანახმად) $f : X \to \mathcal{P}(X)$ ასახვა ბიექციაა, ის, კერძოდ, სურექციაცაა და, მაშასადამე, უნდა არსებობდეს X სიმრავლის ისეთი x_0 ელემენტი, რომ $f(x_0) = A$.

რადგან $x_0 \in X$ და $A \subset X$, აუცილებლად ინდა გვქონდეს: $x_0 \in A$ ან $x_0 \notin A$.

ვთქვათ, $x_0 \in A$. მაშინ A სიმრავლის განმარტების თანახმად უნდა გვქონდეს: $x_0 \notin f(x_0)$. მაგრამ $f(x_0) = A$ და ე. ი. ვღებულობთ: $x_0 \notin A$. ეს კი წინააღმდეგობაა, რადგან ჩვენ დავუშვით, რომ $x_0 \in A$.

ვთქვათ, ახლა, $x_0 \notin A$. მაშინ (კვლავ A სიმრავლის განმარტების თანახმად) არ უნდა იყოს შესრულებული $x_0 \notin f(x_0)$, ანუ უნდა გვქონდეს $x_0 \in f(x_0)$ და რადგან $f(x_0) = A$, უნდა გვქონდეს $x_0 \in A$, რაც ასევე წინააღმდეგობაა, რადგან ჩვენი დაშვების თანახმად, $x_0 \notin A$.

ამრიგად მივიღეთ, რომ $x_0 \in A$ და $x_0 \notin A$ შემთხვევებიდან არცერთი არ სრულდება. ეს კი შეუძლებელია. მიღებული წინააღმდეგობა უჩვენებს იმას, რომ ჩვენი თავდაპირველი დაშვება ბიექციური $f : X \to \mathcal{P}(X)$ ასახვის არსებობის შესახებ მცდარია, ანუ ასეთი ასახვა არ არსებობს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს ინექციური ასახვა X სიმრავლიდან $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლეში (უხეშად რომ ვთქვათ, ყოველი X სიმრავლისათვის $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლე შეიცავს X სიმრავლის ბიექციურ „ასლს“).

დამტკიცება. განვიხილოთ $f : X \to \mathcal{P}(X)$ ასახვა, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს უთანადებს X სიმრავლის 1-ელემენტიან ქვესიმრავლეს, რომლის ერთადერთი ელემენტია x. ამრიგად (ყოველ $x \in X$ -სათვის), $f(x) = \{x\}$. მარტივად მოწმდება, რომ ეს ასახვა ინექციაა.

2.16. სავარჯიშო მაგალითები

2.16.1. მოცემულია შესაბამისობის წესი, რომელიც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს უთანადებს ყოველ n-ნიშნა ნატურალურ რიცხვს. არის თუ არა შესაბამისობის ეს წესი ფუნქცია $\mathbb{N}$ სიმრავლიდან $\mathbb{N}$ სიმრავლეში?

2.16.2. ჩამოაყალიბეთ, რას ნიშნავს, რომ ერთი და იმავე განსაზღვრის არეებისა და ერთი და იმავე მნიშვნელობათა არეების მქონე ორი ფუნქცია არ არის ერთმანეთის ტოლი.

2.16.3. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები.

ა) $y = 3x - 1$.

ბ) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

გ) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0 \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \\ -1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$

2.16.4. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{თუ } -2 \le x \le 0 \\ x\ , & \text{თუ } 0 < x \le 2 \end{cases}$

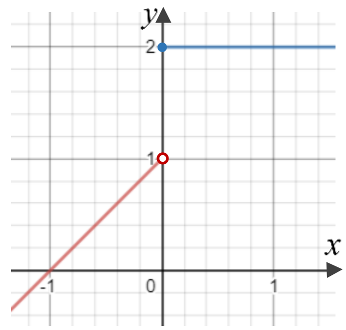
ბ) $f(x)=[x]$, სადაც ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს[8].

გ) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

2.16.5. განვიხილოთ $f(x)=x+0,5$ ფორმულით განსაზღვრული $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქცია და შემდეგი სიმრავლეები: $A=[-4;7)$ და $B=\mathbb{Q}$. იპოვეთ $f(A)$, $f(B)$, $f^{-1}(A)$ და $f^{-1}(B)$.

2.16.6. მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=x^2-3x+2$. იპოვეთ $f(\{1,2\})$, $f([1;2])$, $f([-1;2])$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([4;9])$, $f^{-1}([0;1]\cup[4;9])$, $f^{-1}([-1;9])$, $f^{-1}([-4;-1])$.

2.16.7. მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=x+\dfrac{1}{2}$. იპოვეთ $f(\mathbb{Q})$ და $f^{-1}(\mathbb{Q})$.



ნახაზი 10

გ) მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{თუ } x<0 \\ 2, & \text{თუ } x\geq 0 \end{cases}$ (იხ. ნახაზი 10).

იპოვეთ $f\ (-1;0)$, $f\ (-1;0]$, $f\ (-\infty;+\infty)$, $f^{-1}\ (0;1)$, $f^{-1}\ \{2\}$, $f^{-1}\ (-\infty;1)\cup\{2\}$, $f^{-1}\ [3;4]$.

2.16.8. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი (ისევე, როგორც ნებისმიერი ორი ღია) შუალედი ერთმანეთის ბიექციურია.

2.16.9. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ღია ინტერვალი $\mathbb{R}$-ის ბიექციურია.

2.16.10. ააგეთ ბიექცია $[0;1]$ სიმრავლიდან $(0;1]$ სიმრავლეზე.

2.16.11. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=3x-5$ ფორმულით განსაზღვრული $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქცია ბიექციაა. შესაბამისად, მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. იპოვეთ $f^{-1}(0)$ და $f^{-1}(-5)$.

2.16.12. ოთახში სულ 10 სხვადასხვა ადამიანია. აღვნიშნოთ ეს ადამიანები $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}$ სიმბოლოებით.

მათი გვარები და სახელები მოცემულია ცხრილში ქვემოთ:

---

[8] შეგახსენებთ, რომ x ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება ისეთ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც მოცემულ x რიცხვს არ აღემატება. მაგალითად, განვიხილოთ რიცხვი $x=5,2$. ცხადია, არსებობს უსასრულო რაოდენობა ისეთი მთელი რიცხვებისა, რომლებიც $5,2$-ს არ აღემატება. ასეთია 5-ზე ნაკლები ან ტოლი თითოეული მთელი რიცხვი (და მხოლოდ ისინი). ამ მთელ რიცხვებს შორის უდიდესია რიცხვი 5. ამიტომ, $[5,2]=5$. მეორე მაგალითი: ვთქვათ, $x=-3,7$. ამ რიცხვს არ აღემატება ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვები, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია ან ტოლია (-4)-ზე. მათ შორის უდიდესი კი (-4)-ია. ამიტომ, $[-3,7]=-4$. ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვი n რიცხვისათვის $[n]=n$.

ადამიანი	გვარი	სახელი
a_1	არეშიძე	გიორგი
a_2	ბერიძე	მანანა
a_3	გოგოლაძე	კონსტანტინე
a_4	დვალი	ეკატერინე
a_5	ენუქიძე	დავითი
a_6	ვასაძე	მანანა
a_7	ზერეკიძე	დიმიტრი
a_8	თოდრია	ირაკლი
a_9	ინგოროყვა	დიმიტრი
a_{10}	კაპანაძე	ლუკა

ყველა ამ ადამიანთა სიმრავლე აღვნიშნოთ X ასოთი: $X=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$.

Y ასოთი კი აღვნიშნოთ ყველა ქართული სიტყვების სიმრავლე (ზემოთ ჩამოთვლილი თითოეული ადამიანის როგორც გვარი, ისე სახელი ქართული სიტყვაა!).

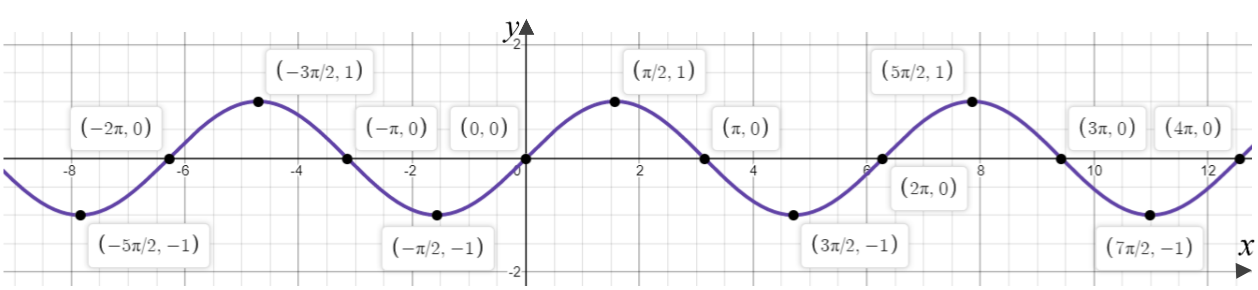
განვიხილოთ ასეთი ორი $f: X \to Y$ და $g: X \to Y$ ასახვა:

X სიმრავლეში შემავალ ყოველ ადამიანს f ასახვით შევუსაბამოთ ამ ადამიანის სახელი, ხოლო g ასახვით – ამ ადამიანის გვარი. მაგალითად, $f(a_9)=$დიმიტრი და $g(a_9)=$ინგოროყვა.

არის თუ არა f ასახვა ინექცია? სურექცია?

არის თუ არა g ასახვა ინექცია? სურექცია?

2.16.13. მოცემულია $f:\mathbb{R}\to[-1;1]$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $f(x)=\sin x$ ფორმულით (მისი გრაფიკი სქემატურად მოცემულია მე-11 ნახაზზე).



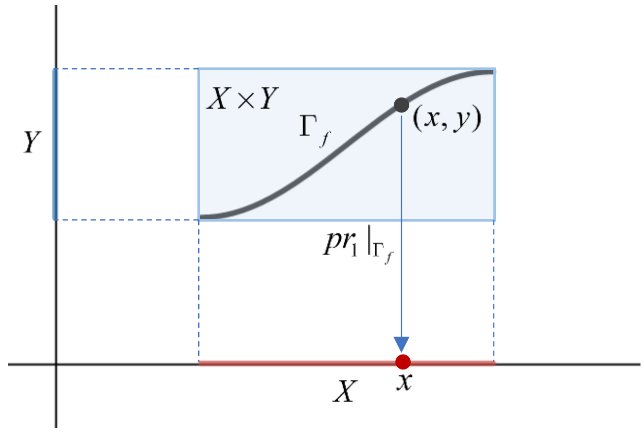
ნახაზი 11

გრაფიკის მიხედვით, დაინახეთ, რომ ქვემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან

$$f\big|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}; \qquad f\big|_{0;\pi}\;; \qquad f\big|_{\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]}$$

პირველი და მესამე ბიექციებია, მეორე კი – არა. შევნიშნოთ, რომ $f\big|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ ბიექციური ფუნქციის შექცეული ასახვა (როგორც ეს სასკოლო მათემატიკის კურსიდან არის ცნობილი) აღინიშნება $\arcsin$ სიმბოლოთი.

2.16.14. ვთქვათ, $f: X \to Y$ ნებისმიერი ასახვაა. განვიხილოთ $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის შემდეგი ქვესიმრავლე: $\Gamma_f = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y,\ y = f(x)\}$. ცხადია, $\Gamma_f \subset X \times Y$. განვიხილოთ $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის $pr_1 : X \times Y \to X$ პროექცია X -ზე ამ პროექციის $pr_1|_{\Gamma_f}$ შეზღუდვა Γ_f -ზე. ამრიგად, ყოველი $(x, y) \in \Gamma_f$ -სათვის, $(pr_1|_{\Gamma_f})(x, y) = pr_1(x, y) = x$ (იხ. ნახაზი 12). არის თუ არა ეს ასახვა ინექცია? სურექცია? ბიექცია?



ნახაზი 12