1. რატომ?

რას ეყრდნობა მათემატიკა, როგორც მეცნიერება? ბუნების შემსწავლელი მეცნიერებების შემთხვევაში მეცნიერული ჰიპოთეზა თუ თეორია საბოლოო ჯამში ექსპერიმენტის საშუალებით, ბუნებაზე უშუალო დაკვირვებით მოწმდება. მეტიც, ხშირად თავად ჰიპოთეზა ასე იბადება – დაკვირვებებში გარკვეული კანონზომიერების შემჩნევით. ასეთი მაგალითები უხვად გვაქვს და მათი მოხმობა შორს წაგვიყვანდა, თუმცა მარტივად შეიძლება ითქვას – ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიისა და სხვა ასეთი მეცნიერებებისთვის საბოლოო საყრდენი, მთავარი „საზომი" თავად ბუნებაა, ფიზიკური სამყაროა.

მათემატიკისთვის?

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ მათემატიკის შემთხვევაში კონკრეტული ფიზიკური სამყაროს ნაცვლად აბსტრაქტულ, მათემატიკურ სამყაროს უნდა დავეყრდნოთ. ეს წარმოსახვითი სამყარო „დასახლებულია" მათემატიკური ობიექტებით – რიცხვებით, ფიგურებით, ფუნქციებით და ა.შ. იქნებ ეს სამყარო გამოდგება საყრდენად, „მთავარ საზომად"? რა თქმა უნდა, ეს გარკვეულწილად ასეც არის, მათემატიკოსებიც მიმართავენ „ექსპერიმენტებს", აწარმოებენ „დაკვირვებებს", აყალიბებენ ჰიპოთეზებს და ამოწმებენ მათ სისწორეს შესაბამის მათემატიკურ ობიექტებზე, თუმცა ანალოგია ფიზიკურ სამყაროსთან მთლად ზუსტი არ არის.

დასაწყისისთვის, თავად მათემატიკური ობიექტების **არსებობა** დგას ეჭვქვეშ. ფიზიკურ ობიექტებს ვხედავთ, ვეხებით, მათი ფიზიკური თვისებები და მახასიათებლები **მოცემულია**, გატყორცნილი ქვა ჩვენგან დამოუკიდებლად მოძრაობს – ჩვენ ამ მოძრაობას უბრალოდ **ვაკვირდებით**, მის ფიზიკურ მახასიათებლებს **ვზომავთ**. მათემატიკური ობიექტები კი ბუნებაში მოცემული არ არის. მათ ვერ ვეხებით, ვერ ვხედავთ, უშუალოდ ვერ ვაკვირდებით. როგორ შეიძლება დავრწმუნდეთ, გააჩნია თუ არა ესა თუ ის თვისება რაიმე მათემატიკურ ობიექტს? რომც მოვახერხოთ და გავარკვიოთ, რომ კონკრეტული ჰიპოთეზა სწორია ერთი, მეორე, მესამე მათემატიკური ობიექტისთვის, რა გარანტია გვაქვს, რომ სადმე თვალუწვდენელ მათემატიკურ სამყაროში არ აღმოჩნდება ისეთი ობიექტი, რომლისთვისაც ჩვენი ჰიპოთეზა აღარ იმუშავებს? საერთოდ, **რატომ** უნდა დავიჯეროთ ამა თუ იმ მათემატიკური თეორემის ჭეშმარიტობა?

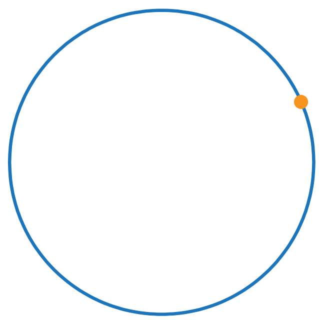
თითქოს საყრდენი ფეხქვეშ გვეცლება. არადა ბავშვობიდან გვეუბნებიან, რომ მათემატიკა „ზუსტი მეცნიერებაა". რას ეფუძნება მისი „სიზუსტე"?

მოდით, აქამდე აღწერილი ანალოგია მარტივი მაგალითის განხილვით გავაშინაარსოთ. დავსვათ კონკრეტული მათემატიკური შეკითხვა და ვცადოთ, მას ამომწურავი პასუხი გავცეთ.

დავუშვათ[1], წრეწირზე რამდენიმე წერტილია მონიშნული. ეს წერტილები ერთმანეთთან მონაკვეთებით შევაერთოთ, ყველა შესაძლო გზით – ანუ თითოეული წერტილი მონაკვეთებით შევაერთოთ ყველა დანარჩენ წერტილთან. მაქსიმუმ რამდენ ნაწილად შეიძლება დაიყოს თავდაპირველი წრე?

ცოტაოდენი დაფიქრებაც საკმარისია, რომ მივხვდეთ – ნაწილების რაოდენობა იმაზეა დამოკიდებული, რამდენი წერტილი ავიღეთ თავიდან[2].

ჩავატაროთ რამდენიმე „ექსპერიმენტი“ – დავაკვირდეთ რა ხდება, როდესაც წერტილების რაოდენობა მცირეა.



ნახ. 1 წრეწირზე ერთი წერტილია აღებული

ცხადია[3], რომ ამ შემთხვევაში შესაერთებელიც არაფერია და ნაწილების რაოდენობა 1-ის ტოლია.

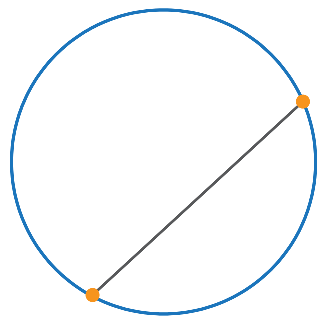
[1] ბევრი მათემატიკური დებულება სწორედ ასე იწყება – „დავუშვათ ესა და ეს... მაშინ სწორი იქნება, რომ ...“. მაშინაც კი, როდესაც დასამტკიცებელი დებულება ასე არ არის ჩამოყალიბებული, დაშვებები თითქმის ყოველთვის *იგულისხმება.*

[2] მათემატიკურ „ჟარგონზე“ ვიტყოდით, რომ წრის ნაწილების მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა წერტილების თავდაპირველი რაოდენობის *ფუნქციაა.*

[3] ეს მათემატიკოსების საყვარელი სიტყვაა, თუმცა ვინ მოთვლის, რამდენი შეცდომა „დამალულა“ სწორედ ამ სიტყვის უკან. ამ კონკრეტულ შემთხვევაშიც კი ჩნდება შეკითხვა – რატომ? ჩვენ ხომ მხოლოდ ერთი კონკრეტული წრე განვიხილეთ, უფრო სწორად კი მხოლოდ ამ წრის *ნახაზი.* საიდან ვიცით, რომ ყველა სხვა წრის განხილვის შემთხვევაშიც იმავე შედეგს მივიღებდით? ნუთუ შესაძლებელია, რომ გონების თვალით ყველა შესაძლო წრის შემთხვევა ერთდროულად მოვიცვათ და ყოველ ჯერზე ერთი და იგივე პასუხი მივიღოთ? თან ისე, რომ ამ პასუხის სისწორეში 100%-ით ვიყოთ დარწმუნებული? თითქოს პასუხია – კი; თუმცა გაუგებარი რჩება, რის საფუძველზე შეგვიძლია ასეთი მრავლისმომცველი ზოგადობით ვიყოთ დარწმუნებული?

განვიხილოთ 2 წერტილის შემთხვევა.

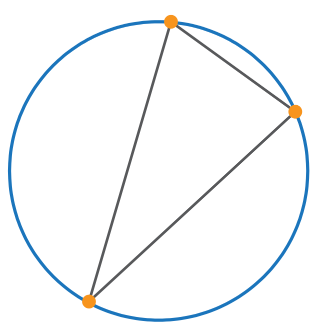
რადგან ორი წერტილი მონაკვეთით ერთადერთი შესაძლო გზით შეგვიძლია შევაერთოთ[4], ასეთ სურათს მივიღებთ:



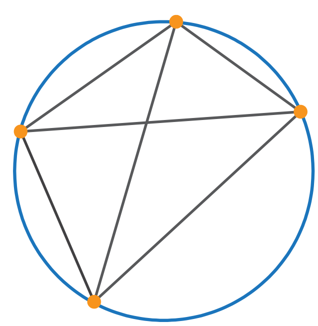
ნახ. 2 წრეწირზე 2 წერტილია აღებული

და წრე ორ ნაწილად[5] გაიყოფა.

სამი და ოთხი წერტილის შემთხვევაში გთავაზობთ, თავად ჩაატაროთ „ექსპერიმენტი“ ფურცელზე, ან წარმოსახვაში და იხილოთ შედეგი, სანამ კითხვას გააგრძელებთ.



ნახ. 3 წრეწირზე 3 წერტილია აღებული.
წრე 4 ნაწილად დაიყო



ნახ. 4 წრეწირზე 4 წერტილია აღებული.
წრე 8 ნაწილად დაიყო

[4] რატომ? საიდან ვიცით, რომ ორი წერტილის შემაერთებელი ერთადერთი სწორი ხაზი არსებობს?

[5] ორი წერტილი ბევრნაირად შეიძლება წრეწირზე განვათავსოთ. შემაერთებელი მონაკვეთი ხან უფრო მოკლე იქნება, ხან უფრო გრძელი (არსებობს თუ არა ამ მონაკვეთებს შორის უმცირესი სიგრძის? უდიდესი სიგრძის?). თუმცა ნათელია, რომ ყველა ამ შემთხვევაში წრე 2 ნაწილად გაიყოფა. რა არის ამ „სინათლის“ საფუძველი?

მოდით, როგორც ბევრ სხვა მეცნიერებაში ხდება, ჩვენი „ექსპერიმენტის“ შედეგები ცხრილის სახით შევაჯამოთ და ვეცადოთ, მთლიანი სურათის განხილვის საფუძველზე, ზოგადი კანონზომიერება ამოვიცნოთ.

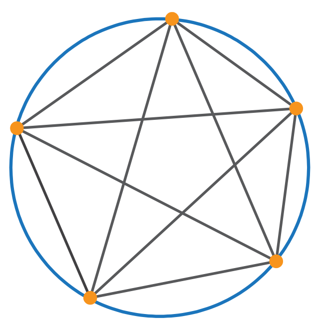
წერტილების რაოდენობა წრეწირზე	1	2	3	4
რამდენ ნაწილად დაიყო წრე	1	2	4	8

ასეთი ტიპის ამოცანებს ხშირად შევხვდებით ინტელექტის (IQ) ტესტებში სათაურით „გააგრძელე მიმდევრობა“. მოდით ვცადოთ, უბრალოდ მიმდევრობის შემდეგი წევრი კი არ „გამოვიცნოთ“, არამედ ზოგადი ჰიპოთეზა შევიმუშაოთ, როგორ იქნება დამოკიდებული წრის არეების მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა წრეწირზე აღებული წერტილების საწყის რაოდენობაზე. ამოვიცნოთ კანონზომიერება. მათემატიკურ ენაზე რომ ვთქვათ, ამოვიცნოთ ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

ალბათ უკვე გაგიჩნდათ იდეა? დაკვირვების შედეგად მიღებული ყოველი შემდეგი რიცხვი ორჯერ მეტია წინაზე. შესაბამისად, თუ თავიდან n წერტილი გვქონდა წრეწირზე აღებული, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ წრე 2^{n-1} ნაწილად დაიყოფა. ჯერ-ჯერობით ეს ჩვენი **სამუშაო ჰიპოთეზაა**, რომელიც არსებულ დაკვირვებებთან იდეალურად არის შეთანხმებული. მართლაც:

n	1	2	3	4
2^{n-1}	1	2	4	8

ნიშნავს თუ არა ეს, რომ ჩვენი ჰიპოთეზა სწორია? ცხადია, რომ ჯერ არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, ეს ვამტკიცოთ. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა კიდევ ერთი „ექსპერიმენტის დადგმით“ – განვიხილოთ 5 წერტილის შემთხვევა:



ნახ. 5 წრეწირზე 5 წერტილია აღებული. წრე 16 ნაწილად დაიყო

ჩვენი ჰიპოთეზა დადასტურდა, 5 წერტილის შემთხვევაში წრე მართლაც 16 ნაწილად დაიყო[6]. ალბათ ჩვენი ფორმულა სწორია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის, თუმცა როგორ დავრწმუნდეთ, რომ ეს ასეა? რიცხვების რაოდენობა ხომ უსასრულოა? მართალია, 3 წერტილის წრეზე განლაგების შესაძლო კონფიგურაციებიც უსასრულოდ ბევრია (ზოგი ტოლგვერდა სამკუთხედს გვაძლევს, ზოგი ტოლფერდას, ზოგი მახვილკუთხას, ზოგიც მართკუთხას და ა.შ.), თუმცა ეჭვი არ გვეპარება, რომ ყოველი ასეთი კონფიგურაციისას წრე ზუსტად 4 ნაწილად დაიყოფა ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთებით. შეიძლება ვთქვათ, რომ 3 წერტილის შემთხვევაში „უეჭველობის" გარანტი ჩვენი **მათემატიკური ინტუიციაა** – გონების თვალით „ცხადად ვხედავთ", რომ 3 ურთიერთგანსხვავებული წერტილის ყველა სხვადასხვა განლაგების დროს წრე ზუსტად 4 ნაწილად დაიყოფა. თუმცა, ასეთი არგუმენტი უკვე 5 წერტილის შემთხვევაში შეიძლება აღარ გამოგვადგეს, რომ აღარაფერი ვთქვათ 6, 7 და ა.შ. წერტილების შემთხვევებზე. თვალსაჩინოებისთვის, გადავხედოთ წრეწირზე 10 წერტილის განლაგების ორ შესაძლო შემთხვევას:

ნახ. 6 წრეწირზე 10 წერტილია აღებული ორი სხვადასხვა გზით. რამდენ ნაწილად დაიყო წრე თითოეულ შემთხვევაში? მარცხენა წრე უფრო მეტ ნაწილად არის დაყოფილი, თუ მარჯვენა?

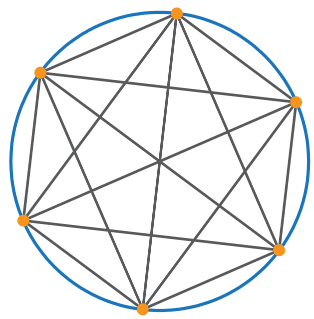
ალბათ ისიც კი გაგვიჭირდება ვთქვათ დარწმუნებით, ამ ორი შემთხვევიდან რომელში უფრო მეტ ნაწილად დაიყო წრე. თუმცა, თუ ამ ნახაზებს „არ შევუშინდებით", ცოტაოდენი დაკვირვების შემდეგ აღმოვაჩენთ, რომ უფრო სიმეტრიულ შემთხვევაში (სადაც 10 წერტილი წრეწირზე თანაბრადაა განლაგებული), ხშირად ხდება, რომ 2-ზე მეტი წრფე იკვეთება ერთსა და იმავე წერტილში. ინტუიტიურად გასაგებია, რომ ეს არც თუ ისე ოპტიმალურია – თუკი გვინდა, რომ წრე რაც შეიძლება ბევრ ნაწილად დაიყოს, უმჯობესი იქნებოდა, 2-ზე მეტი მონაკვეთი არ გადიოდეს წრის ერთსა და იმავე შიდა წერტილზე.

ეს დაკვირვება გვაფიქრებინებს, რომ ნაკლებად სიმეტრიულ შემთხვევაში წრე მეტ ნაწილად არის დაყოფილი, ვიდრე სიმეტრიულ შემთხვევაში. რაც შეეხება იმას, ემთხვევა თუ არა ეს რაოდენობა ჩვენი ფორმულით „ნაწინასწარმეტყველებ" რაოდენობას, ანუ

[6] დაითვალეთ, რომ მართლა ასეა, თუ „სიტყვაზე გვენდეთ"?

$2^{10-1} = 512$ ნაწილს, ეს მაინც რთული გასარკვევი ჩანს. ისიც საკითხავია, ყოველთვის თუ არის შესაძლებელი წერტილების ისე განლაგება წრეწირზე, რომ მათი შემაერთებელი მონაკვეთებიდან არცერთი სამეული არ გადაიკვეთოს ერთსა და იმავე წერტილში წრის შიგნით? მოდით ვნახოთ, რა მოხდება არა 10, არამედ 6 წერტილის შემთხვევაში.

თუ ამ 6 წერტილს სიმეტრიულად, წესიერი ექვსკუთხედის წვეროებში განვალაგებთ, ასეთ სურათს მივიღებთ:



ნახ. 7 წრეწირზე 6 წერტილია აღებული.

რამდენ ნაწილად დაიყო წრე?

დათვლისას შეიძლება ადვილად გამოგვრჩეს რომელიმე არე, ამიტომ ალბათ აზრს მოკლებული არ იქნება, თუ სიმეტრიულობას გამოვიყენებთ. თვალსაჩინოებისთვის, არეების გაფერადებით მიგანიშნებთ დათვლის შესაძლო სტრატეგიაზე:

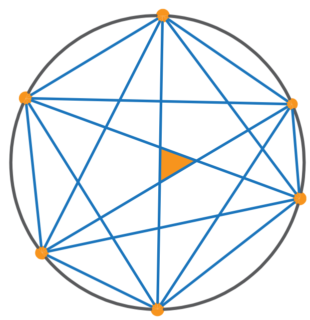
ნახ.8 ერთი სექტორი 5 ნაწილად დაიყო, სულ კი 6 ასეთი სექტორია.

გამოდის, რომ ამ შემთხვევაში წრე 30 ნაწილად დაიყო, რაც 2-ით ნაკლებია ჩვენი ფორმულით გამოთვლილ რიცხვზე $2^{6-1} = 32$, თუმცა რადგან წრეწირის ცენტრში სამი მონაკვეთი გადის, ეს განლაგება ოპტიმალური არ უნდა იყოს.

შეკითხვა: სიმეტრიის გამოყენებით დათვალეთ – რამდენი არე მიიღება წესიერი 10-კუთხედის შემთხვევაში (ნახ. 6)?

როგორ განვალაგოთ წრეწირზე 6 წერტილი ისე, რომ მათი შემაერთებელი მონაკვეთებით წრე ზუსტად 32 ნაწილად დაიყოს?

სიმეტრიული ნახაზის მცირე ცვლილებით შეგვიძლია 1 ახალი სამკუთხა არე „გავაჩინოთ“:



ნახ. 9 ცენტრში წერტილის ნაცვლად სამკუთხედი „დაიბადა “.

თუმცა, რაოდენობა კვლავ 1-ით ნაკლები იქნება ჩვენი ფორმულით გამოთვლილ 32-ზე. იქნებ რამე სხვა განლაგება გვაძლევს 32 ნაწილს?

ყურადღება, შემოთავაზება: მზად ვართ, „M ვექტორის“ განსაკუთრებული პრიზი გადავცეთ მონაწილეს, ვინც პირველი მოახერხებს წრეწირზე 6 წერტილის განალაგებას ისე, რომ წრე ზუსტად 32 ნაწილად დაიყოს. შეგიძლიათ, სცადოთ.

ეს შემოთავაზება, რა თქმა უნდა, **ხუმრობაა**. სინამდვილეში, 6 წერტილის შემთხვევაში 31 მაქსიმალური რაოდენობაა[7].

ჩვენი ჰიპოთეზა მცდარი აღმოჩნდა, თუმცა ალბათ მაინც რჩება ეჭვი[8] – როგორ დავრწმუნდეთ, რომ წერტილების წრეწირზე განლაგების უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა შესაძლებლობიდან არცერთი არ გვაძლევს წრის 32 ნაწილად დაყოფას? ალბათ გასაგებია, რომ **ინტუიცია** ასეთ შემთხვევებში პირდაპირ აღარ გამოგვადგება.

დავუბრუნდეთ ჩვენს მთავარ შეკითხვას – რას ეყრდნობა მათემატიკა? რა გამოდგება **უტყუარ დასაბუთებად** ასეთი და მსგავსი სიტუაციების შემთხვევაში, როდესაც ყველა ვარიანტის თვალნათლივ გადასინჯვა უბრალოდ შეუძლებელი ჩანს? როგორ დავრწმუნდეთ, რომ ესა თუ ის მათემატიკური დებულება სწორია?

ამ შეკითხვაზე პასუხი უკვე 2 ათასწლეულზე მეტია, რაც ცნობილია – ეს არის **დამტკიცება**. სწორედ დამტკიცების საშუალებით ვრწმუნდებით ამა თუ იმ მათემატიკური თეორემის მართებულობაში. დამტკიცება გვაძლევს საშუალებას, ერთდროულად მოვიცვათ ყველა შესაბამისი შემთხვევა და 100%-ით ვიყოთ დარწმუნებული, რომ რასაც ვამტკიცებთ,

[7] რატომ? საიდან ვიცით?

[8] ასეთი ეჭვი მნიშვნელოვნად შეგვიმცირდებათ, თუკი მართლაც შეეცდებით ჩვენი შემოთავაზებით სარგებლობას და 32-ნაწილიანი განლაგების პოვნას.

ჭეშმარიტია. დამტკიცების დახმარებით ის, რაც სულაც არ არის ცხადი, დაიყვანება იმაზე, რაც ცხადია – თან დაიყვანება ასევე ცხადი ნაბიჯებით. მათემატიკური დამტკიცება არის ყველაზე მკაფიო, ეტალონური მაგალითი დასაბუთების უძველესი ფორმულისა – „არაცხადის გაცხადება ცხადის საშუალებით“.

დამტკიცება მათემატიკური, ზუსტ ენაზე ჩამოყალიბებული დებულებების მოწესრიგებული მიმდევრობაა, სადაც ყოველი შემდეგი დებულება ლოგიკურად გამომდინარეობს წინა დებულებებიდან. გამართული დამტკიცება გვაჩვენებს, რომ მის შედეგად მიღებული დანასკვი იმდენადვე ჭეშმარიტია, რამდენადაც მისი საწყისი დაშვებები.

„M ვექტორის“ ერთ-ერთი საკონკურსო თემა სწორედ **ფორმალური დამტკიცების თეორია** იქნება. ჩვენ ჯერ გავეცნობით ფორმალიზმისა და გამოყვანის ზოგად, მაგრამ ზუსტ ცნებებს, შემდგომ კი მათი მეშვეობით შევისწავლით დებულებათა ლოგიკის დამტკიცებათა თეორიას, რომლის კონტექსტშიც ცალსახა და ზუსტ პასუხს გავცემთ კითხვას, თუ რა არის დამტკიცება.

ჰო, მართლა – ბოლოს და ბოლოს მაქსიმუმ რამდენ არედ დაიყოფა წრე n წერტილის შემთხვევაში? არსებობს ზოგადი ფორმულა? შეგვიძლია, უტყუარად დავასაბუთოთ, რომ ფორმულა ყოველ ჯერზე სწორ პასუხს მოგვცემს?

სავარჯიშოები და ამოცანები:

ამოცანა 1.1

წრეწირზე n ცალი წერტილია აღებული. ამ წერტილებიდან თითოეული მონაკვეთით არის შეერთებული ყველა დანარჩენთან. ამ მონაკვეთებით წრე იყოფა რამდენიმე არედ, რომელთაგან ზოგი მრავალკუთხედია, ზოგი კი – წრის სეგმენტი. n ცალი წერტილი ბევრნაირად შეიძლება განვალაგოთ წრეწირზე, შედეგად მიღებული არეების რაოდენობაც, საზოგადოდ, სხვადასხვა იქნება.

n ცალი წერტილის კონკრეტული X განლაგებისას მიღებული არეების რაოდენობა აღვნიშნოთ $F(X,n)$-ით.

a) მართალია თუ არა, რომ ყოველთვის შეიძლება n ცალი წერტილის ისე განლაგება წრეწირზე, რომ მათი შემაერთებელი მონაკვეთებიდან ორზე მეტმა არ გაიაროს წრის შიგნით მდებარე არცერთ წერტილზე?

b) რა **უდიდეს** მნიშვნელობას მიიღებს $F(X,n)$ ყოველი ფიქსირებული n-თვის? შეეცადეთ იპოვოთ კონკრეტული ფორმულა, რომელიც მხოლოდ n-ზე იქნება დამოკიდებული და დაასაბუთოთ მისი მართებულობა.

შინაარსით მსგავსია შემდეგი ორი ამოცანაც, რომლებსაც საკმაოდ ელეგანტური ამოხსნები გააჩნიათ.

<u>ამოცანა 1.2</u>

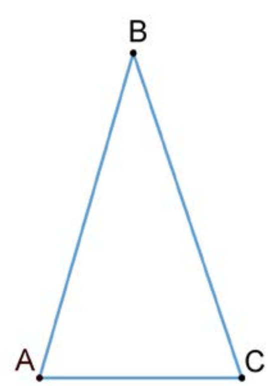
სიბრტყეზე გავლებულია n ცალი წრფე ისე, რომ წრფეების არცერთი სამეული არ გადის ერთსა და იმავე წერტილში. რამდენ არედ დაიყოფა სიბრტყე ამ წრფეებით?

<u>ამოცანა 1.3</u>

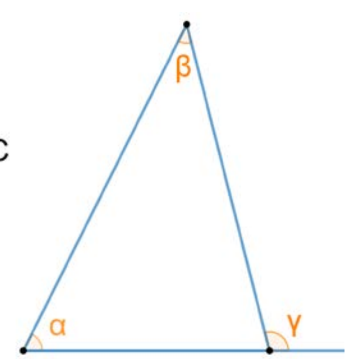
სივრცეში გავლებულია n ცალი სიბრტყე ისე, რომ არცერთი სამეული არ შეიცავს ერთსა და იმავე წრფეს. რამდენ ნაწილად დაიყოფა სივრცე ამ სიბრტყეებით?

შემდეგი ამოცანა ელემენტარული გეომეტრიის სფეროდანაა. ყველასთვის ნაცნობი და თვალნათელი ფაქტია ე. წ. სამკუთხედის უტოლობა – ნებისმიერ სამკუთხედში ორი გვერდის ჯამი მეტია მესამეზე. ეს იმდენად ცხადი ჩანს, რომ თითქოს დასაბუთებასაც არ საჭიროებს. მიუხედავად ამისა, მაინც შევეცადოთ ამ ფაქტის დამტკიცებას. ამ მცდელობისას ასეთი სირთულე ჩნდება – რას უნდა დავეყრდნოთ დამტკიცებისას? ჩვენი ამოცანა იქნება, სიბრტყის გეომეტრიის (პლანიმეტრიის) ფარგლებში დავრჩეთ (არ გამოვიყენოთ, ვთქვათ, კოორდინატთა მეთოდი, ტრიგონომეტრია ან ვექტორული აღრიცხვა) და სამკუთხედის უტოლობა გამოვიყვანოთ რაც შეიძლება ელემენტარული, მარტივი შინაარსის გეომეტრიული ფაქტებიდან. მაგალითად, არ გამოვიყენოთ დამტკიცებისას რაიმე ისეთი ფაქტი, რაც თავის მხრივ სამკუთხედის უტოლობას ეყრდნობა. შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ორი ფაქტი:

ტოლფერდა სამკუთხედის თვისება: სამკუთხედის ორი გვერდი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებიც ტოლია. ნახაზზე: თუ $AB = BC$ მაშინ $\angle C = \angle A$ (და პირიქით).



სამკუთხედის გარე კუთხის თვისება: სამკუთხედის გარე კუთხე მეტია მისი არამოსაზღვრე შიდა კუთხეებიდან თითოეულზე. ნახაზზე: $\gamma > \alpha$ და $\gamma > \beta$.



ამოცანა 1.4

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში უდიდესი გვერდის სიგრძე ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეების ჯამზე. დამტკიცებისას შეგიძლიათ გამოიყენოთ ტოლფერდა სამკუთხედის თვისება და სამკუთხედის გარე კუთხის თვისება.

შემდეგი ამოცანა ნატურალური რიცხვების არითმეტიკას ეხება:

ამოცანა 1.5

მოცემულია დადებითი ნატურალური რიცხვები a, b, c, d რომლებისთვისაც $a \cdot b = c \cdot d$. შეიძლება თუ არა, რომ მათი ჯამი $a + b + c + d$ მარტივი რიცხვი იყოს?

მათემატიკის „საქმე“ მკაფიო შეკითხვების დასმა და მათზე პასუხების თანმიმდევრული ძიებაა, „ნაპოვნი“ პასუხების „შემოწმება“ კი დამტკიცებით ხდება. ამ თემის მომდევნო ნაწილებში ჩვენ სწორედ დამტკიცების ცნების უკეთ გაგებას შევეცდებით.