რიცხვითი სისტემები - მეორე ნაწილი

პირველ ნაწილში ჩვენ ვიმუშავეთ რიცხვების იმ თვისებებზე, რომლებიც უკავშირდება მათზე ყველაზე საჭირო და სასარგებლო არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარებას - შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას და გაყოფას. ჩვენ ვნახეთ, რომ ეს ოპერაციები შეიძლება „გავაჩინოთ" გეომეტრიული აგებების მეშვეობით, და ამისათვის გვჭირდება სიბრტყეზე წერტილებისა და წრფეების მხოლოდ რამდენიმე ძირითადი თვისება. აღმოჩნდა, რომ არსებობს უჩვეულო „სიბრტყეები", რომლებიც შეიცავენ „წერტილებისა" და „წრფეების" მხოლოდ სასრულ რაოდენობას, მაგრამ მათაც ყველა ჩვენთვის საჭირო თვისებები გააჩნიათ. ამიტომ ასეთი სიბრტყეები აგრეთვე აჩენენ თავიანთ სასრულ რიცხვით სისტემებს, რომლებშიც არითმეტიკული ოპერაციები იმავე წესით განისაზღვრება, როგორც ნებისმიერ საჭირო თვისებების მქონე „სიბრტყეში".

სინამდვილეში ასეთი უცნაური რიცხვების აგება მხოლოდ იმიტომ შევძელით, რომ უგულებელვყავით რიცხვთა ერთობლიობის ერთი ძალიან მნიშვნელოვანი თავისებურება. გარდა იმისა, რომ რიცხვებზე შეგვიძლია არითმეტიკული ოპერაციები ვაწარმოოთ, ჩვენ მათი სიდიდის მიხედვით შედარებაც შეგვიძლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, „ჩვეულებრივი" რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით. ამ დალაგების თვისებების გათვალისწინება რიცხვებს სულ სხვანაირად დაგვანახებს.

ოღონდ სანამ რიცხვების დალაგების თვისებების განხილვას შევუდგებოდეთ, პირველ ნაწილში მიღებულ „რიცხვებს" კიდევ ერთხელ გადავხედოთ და ვნახოთ, სუფთა ალგებრული თვალსაზრისითაც ხომ არ „აკლდა" მათ რიცხვების რაიმე ჩვენთვის ნაცნობი თვისებები.

განტოლებების ამონახსნები

თუ თქვენ შეხედეთ პირველ ნაწილში გაჩენილ ორ რიცხვით სისტემას, გეცოდინებათ, რომ ისინი მიიღებოდნენ მთელ რიცხვთა ნაშთების მეშვეობით. პირველი მათგანი, რომელიც მივიღეთ ოთხწერტილიანი „სიბრტყის" განხილვით, სულ ორი „რიცხვისგან" შედგებოდა: ეს იყო 0 და 1. ყველანაირი მოქმედებების (შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის) განსაზღვრისთვის საჭირო იყო ერთადერთი უჩვეულო წესი, 1+1 = 0, ასე რომ საქმე გვქონდა 2-ზე გაყოფის ნაშთებთან. მეორე მაგალითში გვქონდა ცხრაწერტილიანი სიბრტყე. აქ თუ რიცხვების აგება ბოლომდე ჩაატარეთ, უნდა გამოგსვლოდათ სულ სამი რიცხვი, ისევ 0 და 1 და კიდევ ერთი, რომელსაც შეგვიძლია დავარქვათ 2. შეკრების წესებში უნდა გაგჩენოდათ $1+2=0$, $2+2=1$, გამრავლებაში კიდევ $2\times 2=1$. აქ ცოტა უფრო „ნაცნობ" წესებს მივიღებთ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ეს 2 ამ შემთხვევაში იგივეა, რაც -1. მაშინ მიღებული რიცხვები იქნება $0,1,-1$ „უჩვეულო" თვისებებით $1+1=-1$, $(-1)+(-1)=1$

ალბათ გსმენიათ მსგავსი სისტემების შესახებ, რომლებიც მიიღება რაიმე p მარტივი რიცხვის არჩევით და ყველა მოქმედების შედეგის p-ზე გაყოფის ნაშთზე გადაყვანით.

უფრო დაწვრილებით: ვირჩევთ რაიმე p ცალ მთელ რიცხვს, რომლებსაც p-ზე გაყოფისას სხვადასხვა ნაშთები აქვთ, მაგალითად, $0,1,\dots,p-1$ ან, ვთქვათ, $-\frac{p-1}{2},\dots,-1,0,1,\dots,\frac{p-1}{2}$. ამ რიცხვებზე მოქმედებებს ვსაზღვრავთ შემდეგნაირად: ვკრებთ, ვამრავლებთ თუ ვყოფთ ჩვეულებრივად. თუ მივიღეთ რაღაც რიცხვი k, რომელიც ჩვენს მიერ არჩეულთაგან არც ერთს არ ემთხვევა, მაშინ მას ვაკლებთ ან ვუმატებთ p-ს ჯერად რიცხვს ისეთნაირად, რომ მივიღოთ ჩვენს მიერ არჩეული ერთ-ერთი რიცხვი.

მიღებული რიცხვით სისტემას ეწოდება p-ელემენტიანი ველი, მას აღნიშნავენ $\mathbb{F}_p$-თი

II.1. მაგალითი

ავირჩიოთ $p=11$ და დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ველში $\mathbb{F}_{11}$ „ყველაფერი რიგზეა" გაყოფის თვალსაზრისით. ამისათვის საკმარისია ვისწავლოთ შებრუნება, ე. ი. ვიპოვოთ $1/n$ თითოეული ჩვენი n რიცხვისათვის, იმიტომ რომ m/n იგივეა, რაც $m\times(1/n)$.

სულ გვაქვს 11 „რიცხვი“. იმისათვის, რომ „უჩვეულო“ გამრავლებები რაც შეიძლება ნაკლები გვქონდეს, რაც შეიძლება მეტგან გამოვიყენოთ უარყოფითი რიცხვები, როგორც ეს ამწუთას 3-ზე გაყოფის ნაშთებისათვის გავაკეთეთ. მივიღებთ აი ასეთ გამრავლების ტაბულას

$\times$	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
-5	3	-2	4	-1	5	0	-5	1	-4	2	-3
-4	-2	5	1	-3	4	0	-4	3	-1	-5	2
-3	4	1	-2	-5	3	0	-3	5	2	-1	-4
-2	-1	-3	-5	4	2	0	-2	-4	5	3	1
-1	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	-4	-2	0	2	4	-5	-3	-1
3	-4	-1	2	5	-3	0	3	-5	-2	1	4
4	2	-5	-1	3	-4	0	4	-3	1	5	-2
5	-3	2	-4	1	-5	0	5	-1	4	-2	3

როგორც ვხედავთ, ყოველ სტრიქონსა და სვეტში ერთგან მაინც გვხვდება 1 (გარდა იმ სტრიქონის და სვეტისა, რომელშიც სულ 0-ები წერია). ასე რომ, $\mathbb{F}_{11}$-ში, მაგალითად, $\frac{1}{2} = -5, \frac{1}{3} = 4$.

იგივე სამართლიანია ნებისმიერი მარტივი p-სათვისაც, თუმცა რაიმე მარტივი წესი, რომელიც $\mathbb{F}_p$ ველში ყველანაირი $1/n$ სახის რიცხვების გამოგვათვლევინებს, მაინც და მაინც არ ჩანს.

იმისათვის, რომ ყოველ ჯერზე ცხრილები არ ვადგინოთ, ჩავატაროთ ზოგადი მსჯელობა, რომელიც დაგვარწმუნებს, რომ $\mathbb{F}_p$ ველში ყოველ არანულოვან რიცხვზე გაყოფა მართლაც შესაძლებელია.

II.2. დებულება

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სასრული რიცხვითი სისტემა F, შეკრებით, გამოკლებითა და გამრავლებით, რომელშიც სრულდება განრიგებადობა $a(b+c) = ab + ac$ და გარდა ამისა არანულოვანი რიცხვების ნამრავლი არანულოვანია. მაშინ F-ში შესაძლებელია არანულოვან რიცხვებზე გაყოფაც: ნებისმიერი a-სა და b-სათვის, თუ $a \neq 0$, მოიძებნება ისეთი ერთადერთი x, რომ $ax = b$.

დამტკიცება. რამენაირად ჩამოვწეროთ F-ში შემავალი ყველა რიცხვი სათითაოდ, ვთქვათ ასე: $x_1, x_2, \dots, x_n$. ავიღოთ რაიმე არანულოვანი რიცხვი a და განვიხილოთ რიცხვების ახალი ჩამონათვალი $ax_1, ax_2, \dots, ax_n$. ამ ჩამონათვალში რიცხვები არ გამეორდება. მართლაც, თუ $ax_i = ax_j$, მაშინ $ax_i - ax_j = 0$, საიდანაც, განრიგებადობის გამოყენებით $a(x_i - x_j) = 0$. ვინაიდან F-ში არანულოვანი რიცხვების ნამრავლი არანულოვანია, ხოლო a არანულოვანია, ვასკვნით, რომ $x_i - x_j = 0$, ანუ $i = j$.

ამრიგად, $ax_1, ax_2, \dots, ax_n$ ყოფილა კვლავ F-ში შემავალი ყველა რიცხვის ჩამონათვალი თითოჯერ (შესაძლოა, სხვა თანმიმდევრობით). სხვანაირად რო ვთქვათ, F-ში შემავალი ყოველი რიცხვი b ამ ჩამონათვალში სადღაც წერია. ანუ, ყოველი b-სათვის მოიძებნება ისეთი i, რომ $b = ax_i$.

II.3. კითხვა

რატომ მოვითხოვეთ, რომ ჩვენი რიცხვითი სისტემა F სასრული იყოს? შეგიძლიათ მოიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებდა, რომ ეს დებულება არ არის სამართლიანი უსასრულო რიცხვითი სისტემებისათვის?

II.4. კითხვა

გასაგებია, ვგულისხმობთ, რომ II.2 დებულებას გამოვიყენებთ, როცა F არის $\mathbb{F}_p$. რატომ არის საჭირო, რომ p მარტივი იყოს? შეგიძლიათ არამარტივი p-სათვის მოიყვანოთ მაგალითი ისეთი a, b რიცხვებისა, რომ a არ იყოფა p-ზე, მაგრამ არ მოიძებნება ისეთი x, რომ ax-სა და b-ს ერთი და იგივე ნაშთი ჰქონდეთ p-ზე გაყოფისას?

ამრიგად, ყოველ მარტივ ველში $\mathbb{F}_p$ შეგვიძლია ამოვხსნათ $ax = b$ სახის ყველანაირი განტოლება, თუ, რა თქმა უნდა, a არანულოვანია. ეხლა ვნახოთ, რა შეიძლება მოვუხერხოთ ისეთ განტოლებებს, რომლებსაც ჩვენს ველში ამონახსნი არ გააჩნიათ. ასეთი განტოლების პოვნას არაფერი უნდა:

II.5. მაგალითი

განვიხილოთ ველი $\mathbb{F}_2$ და მასზე განტოლება $x^3 + x + 1 = 0$. ჩვენს ველში სულ ორი რიცხვი გვაქვს, 0 და 1. თუ x-ის ნაცვლად 0-ს ჩავსვამთ, მივიღებთ $0^3 + 0 + 1 = 1$, ხოლო თუ 1-ს, მაშინაც გამოგვივა $1^3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 = 1$. ასე რომ ტოლობა $x^3 + x + 1 = 0$ არ სრულდება არც ერთი x-ისათვის $\mathbb{F}_2$-დან.

II.6. კითხვა

შეგიძლიათ იპოვოთ ისეთი მარტივი რიცხვი p, რომ ველში $\mathbb{F}_p$ ამ განტოლების $x^3 + x + 1 = 0$ ამოხსნა შესაძლებელი იყოს?

როგორ უნდა მოვიქცეთ, როდესაც ამონახსნი არა გვაქვს? პასუხი მარტივია - ამონახსნი უნდა *გავაჩინოთ*.

მოდით მაგ ჩვენს **II.5** მაგალითზე ვნახოთ, როგორ კეთდება ეს. ვცადოთ დავამატოთ ველს ახალი რიცხვი, რომელიც ჩვენთვის საჭირო განტოლების ამონახსნი იქნება. დავარქვათ ამ რიცხვს, მაგალითად, r. ამრიგად, ამ r-ს ერთადერთი რამ მოეთხოვება: $r^3 + r + 1$ უნდა იყოს ნოლის ტოლი. ამასთან გვინდა, რომ ამ r-თან ერთად $\mathbb{F}_2$ კვლავ ველს ქმნიდეს, ე. ი. რა რიცხვებსაც მივიღებთ, მათზე შეგვეძლოს შეკრების, გამრავლების და გაყოფის შესრულება. ამისათვის r-ის გარდა დაგვჭირდება, მაგალითად, $r + 1$ და r^2. აი მაგალითად r^3 უკვე აღარ დაგვჭირდება: ჩვენ ხომ ვიცით, რომ $r^3 + r + 1 = 0$, ამიტომ $r^3 = -r - 1$. თანაც $\mathbb{F}_2$-ში -1 იგივეა, რაც 1, და $-r = (-1) \times r = 1 \times r = r$. ამრიგად, $r^3 = r + 1$.

ასე რომ, მხოლოდ შეკრების წესების გათვალისწინებით სულ დაგვიგროვდება რვა რიცხვი:

$$0,1,r,r^2,r+1,r^2+1,r^2+r,r^2+r+1.$$

ამ რიცხვების შეკრების წესი ნათელია იქედან გამომდინარე, რომ, მაგალითად, $r + r = (1 + 1) \times r = 0 \times r = 0$. აქედან იოლად შევადგენთ ამ რიცხვების შეკრების ცხრილს:

	0	1	r	r^2	$r+1$	r^2+1	r^2+r	r^2+r+1
0	0	1	r	r^2	$r+1$	r^2+1	r^2+r	r^2+r+1
1	1	0	$r+1$	r^2+1	r	r^2	r^2+r+1	r^2+r
r	r	$r+1$	0	r^2+r	1	r^2+r+1	r^2	r^2+1
r^2	r^2	r^2+1	r^2+r	0	r^2+r+1	1	r	$r+1$
$r+1$	$r+1$	r	1	r^2+r+1	0	r^2+r	r^2+1	r^2
r^2+1	r^2+1	r^2	r^2+r+1	1	r^2+r	0	$r+1$	r
r^2+r	r^2+r	r^2+r+1	r^2	r	r^2+1	$r+1$	0	1
r^2+r+1	r^2+r+1	r^2+r	r^2+1	$r+1$	r^2	r	1	0

რაც შეეხება გამრავლებას, უნდა გამოვიყენოთ ხოლმე განრიგებადობა და გადამრავლებისას სადაც შეგვხვდება r^3, ყველგან შევცვალოთ $r + 1$-ით. თუ დაგვიჯდება r^4, მას შევცვლით $r^3 \times r = (r + 1) \times r = r^2 + r$-ით. მაგალითად,

$$(r^2+1)(r^2+r) = r^4 + r^3 + r^2 + r = (r^2+r) + (r+1) + r^2 + r = r^2 + r^2 + r + r + r + 1 = r + 1$$

ასეთნაირად შევავსებთ გამრავლების ცხრილსაც:

	0	1	r	r^2	$r+1$	r^2+1	r^2+r	r^2+r+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	r	r^2	$r+1$	r^2+1	r^2+r	r^2+r+1
r	0	r	r^2	$r+1$	r^2+r	1	r^2+r+1	r^2+1
r^2	0	r^2	$r+1$	r^2+r	r^2+r+1	r	r^2+1	1
$r+1$	0	$r+1$	r^2+r	r^2+r+1	r^2+1	r^2	1	r
r^2+1	0	r^2+1	1	r	r^2	r^2+r+1	$r+1$	r^2+r
r^2+r	0	r^2+r	r^2+r+1	r^2+1	1	$r+1$	r	r^2
r^2+r+1	0	r^2+r+1	r^2+1	1	r	r^2+r	r^2	$r+1$

შევნიშნოთ, რომ გაყოფის საქმე თავისით მოგვიგვარდა: ყოველ სტრიქონსა და ყოველ სვეტში ყველა ჩვენი რიცხვი გვხვდება (თან თითოჯერ)! მაგალითად, თუ გვაინტერესებს, რას უდრის $(r+1)/(r^2+1)$, უნდა ავირჩიოთ სტრიქონი, რომლის პირველ სვეტში დგას r^2+1 და ვიპოვოთ სვეტი, რომლისთვისაც ამ სტრიქონში წერია $r+1$. პასუხი იქნება ის რიცხვი, რომელიც ამ სვეტის თავშია, ანუ r^2+r. მართლაც, გამრავლების ცხრილის მიხედვით გამოდის, რომ $(r^2+1)(r^2+r)=r+1$, ე. ი. $(r+1)/(r^2+1)=r^2+r$.

II.7. კითხვა

ვთქვათ, გამრავლების ცხრილი ჯერ არ შეგვიდგენია. შეგიძლიათ II.2 დებულების გამოყენებით აჩვენოთ, რომ გაყოფის საქმე კარგად იქნება?

სინამდვილეში ამ კითხვაზე პასუხი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა განტოლების ამონახსნს მივუერთებთ ჩვენს რიცხვით ველს. x^3+x+1 განტოლებისათვის ყველაფერი მართლაც კარგადაა, მაგრამ ზოგი განტოლებისათვის საქმე შეიძლება გაფუჭდეს. ავიღოთ, მაგალითად, განტოლება $x^5+x+1=0$ იმავე $\mathbb{F}_2$ ველზე. გასაგებია, რომ არც ამ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი: არც 0^5+0+1 და არც 1^5+1+1 არ არის 0-ის ტოლი. ერთი შეხედვით აქაც შეგვიძლია ისეთივენაირად მოვიქცეთ: ავიღოთ რაღაც ახალი s, რომელზეც მხოლოდ ის ვიცით, რომ მისთვის სრულდება $s^5+s+1=0$. ახალი რიცხვები 0-ისა და 1-ის გარდა ამჟამად გვექნება s, s^2, s^3, s^4 და კიდევ ამათი ყველანაირი ჯამები, $s+1$, s^2+1, s^2+s, s^3+1, ..., s^4+s^3+s, ..., სულ 32 რიცხვი გამოგვივა. ამ რიცხვების შეკრებასა და გამრავლებას ისევ ისე იოლად განვსაზღვრავთ, მაგრამ გაყოფისას პრობლემა შეგვექმნება.

II.8. კითხვა

ხვდებით, რატო ვერ მოვახერხებთ გაყოფას? თუ თქვენ II.7 კითხვაზე პასუხი გაეცით, გეცოდინებათ, რომ რაღაც მიზეზის გამო ამ შემთხვევაში II.2 დებულებას ვერ გამოვიყენებთ. მაგრამ რა არის ეს მიზეზი?

ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა რომ გაგიადვილდეთ, ერთ მინიშნებას მოგცემთ. ვთქვათ, განტოლების ამონახსნი უკვე გვაქვს, მაგრამ რაღაც ახირების გამო მაინც ვატარებთ ზემოთ მოყვანილ აგებას ამ ამონახსნის ასაგებად. მაგალითად, ნებისმიერ რიცხვით სისტემაში $x^2-1=0$ განტოლებას აქვს ამონახსნი, სახელდობრ 1. ჩვენ რომ რაღაც ახირების გამო მაინც შევეცადოთ ჩვენს ველს მივუერთოთ ამ განტოლების ამონახსნი t, შეკრებასა და გამრავლებას ისევ უპრობლემოდ განვსაზღვრავთ. ჩვენს ახალ რიცხვებს ექნებათ სახე $a+bt$, სადაც a და b ნებისმიერი „ძველი“ რიცხვებია. გამრავლებას განვსაზღვრავთ „ფრჩხილების გახსნით“, ე. ი. ისევ განრიგებადობის გამოყენებით: $(a+bt)(c+dt)=ac+adt+bct+bdt^2=ac+bd+(ad+bc)t$, ვინაიდან $t^2=1$. მაგრამ გაყოფასთან პრობლემები შეგვექმნება, იმიტომ რომ ამ გამრავლების წესის მიხედვით, მაგალითად, $(1-t)(1+t)=1-t^2=0$, ასე რომ არანულოვანი რიცხვების ნამრავლი ნული გამოდის.

II.9. კითხვა

ისე კაცმა რომ თქვას, რატო აფუჭებს გაყოფის საქმეს ის, რომ რომელიმე არანულოვანი რიცხვების ნამრავლი ნულია?

ღრიჭოების ამოვსება

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ რიცხვების იმ თვისებებს, რომლებიც მათზე არითმეტიკულ მოქმედებებს უკავშირდება - შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას და გაყოფას. არა და „ჩვეულებრივი“ რიცხვები დალაგებულიცაა: ნებისმიერი ორი a და b რიცხვებისათვის ან $a < b$, ან $a = b$, ან $a > b$. გამოკლება საშუალებას გვაძლევს დალაგების ეს მიმართება დავიყვანოთ დადებითობის და უარყოფითობის თვისებაზე: თუ ვიცით, რომელი რიცხვებია დადებითი და რომელი უარყოფითი, დალაგებას ხელად განვსაზღვრავთ. მართლაც, $a < b$ სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a - b$ უარყოფითია, $a = b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a - b$ ნულია და $a > b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a - b$ დადებითია. დალაგების ჩვეულებრივი თვისებები ითარგმნება დადებითი და უარყოფითი რიცხვების თვისებებში. მაგალითად, დალაგების ის თვისება, რომ ნებისმიერი a და b-სათვის სამი შესაძლებლობიდან $a < b$, $a = b$, $a > b$ ხორციელდება ერთი მხოლოდ ერთი, შეესაბამება იმას, რომ ნებისმიერი რიცხვი ან უარყოფითია, ან ნულია ან დადებითია, თანაც არ შეიძლება ამ სამი შესაძლებლობიდან ერთზე მეტი განხორციელდეს.

II.10. კითხვა

შეგიძლიათ ასეთივენაირად დაადგინოთ, დადებითი და უარყოფითი რიცხვების რა თვისებას შეესაბამება დალაგების ის თვისება, რომ $a < b$ და $b < c$-დან გამომდინარეობს $a < c$?

მთელი რიცხვების დალაგებით თავს არ შეგაწყენთ. რაც შეეხება წილადებს, ესენიც იოლად ლაგდებიან. წილადების შედარებაც შეგვიძლია დადებითობა-უარყოფითობაზე დავიყვანოთ. გასაგებია, რომ წილადი p/q დადებითია, როდესაც p და q ან ორივე დადებითა, ან ორივე უარყოფითი, ნოლია თუ $p = 0$ და უარყოფითია თუ არც დადებითია არც ნოლი (ე. ი. ერთ-ერთი მათგანი დადებითია, ხოლო მეორე უარყოფითი). ვინაიდან $q = 0$ გამორიცხულია, ამით სამი შესაძლებლობიდან ზუსტად ერთ-ერთის შესრულება უზრუნველყოფილი გვაქვს.

ორი $a = p/q$ და $b = r/s$ წილადის შესადარებლად, უნდა განვიხილოთ მათი სხვაობა $a - b = (ps - qr)/(qs)$. შევნიშნოთ, რომ $a = b$ ამ შემთხვევაში სულაც არ ნიშნავს იმას, რომ $p = r$ და $q = s$, მხოლოდ იმას, რომ სრულდება ტოლობა $ps = qr$. ეს არის თქვენთვის კარგად ცნობილი გაერთმნიშვნელიანების ნაირსახეობა. ხომ გასაგებია, რომ p/q და $(kp)/(kq)$ ერთსა და იმავე რიცხვს წარმოადგენს, ამიტომ იქედან, რომ $ps = qr$, გვექნება $p/q = (ps)/(qs) = (qr)/(qs) = r/s$.

საქმე რომ გავიმარტივოთ, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ p/q წილადისათვის არჩეული გვაქვს წარმოდგენა, რომელშიც $q > 0$. გასაგებია, ამას ყოველთვის მივაღწევთ, რადგან $p/q = (-p)/(-q)$. და ბარემ ისიც ვიგულისხმოთ, რომ არჩეული გვაქვს უკვეცი წარმოდგენა, რაც ნიშნავს, რომ ამ წილადს ვერაფერზე ვერ შევკვეცთ, ე. ი. p-სა და q-ს საერთო გამყოფები არ გააჩნიათ (±1-ის გარდა, რა თქმა უნდა). გასაგებია, რომ ყოველ არანულოვან წილადს ერთადერთი ასეთი წარმოდგენა ექნება.

ეხლა ნახეთ, ყოველი წილადი p/q დაგვიყოფს წილადებს სამ ნაწილად: ის წილადები, რომლებიც p/q-ზე ნაკლებია, ისინი, რომლებიც მისი ტოლია (ჩვენს მიერ არჩეული წარმოდგენით ასეთი ერთადერთია), და ისინი, რომლებიც p/q-ზე მეტია. თუ ყველა წილადების, ანუ ყველა რაციონალური რიცხვების ერთობლიობას აღვნიშნავთ $\mathbb{Q}$-თი, ეს გარემოება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\mathbb{Q} = L_{p/q} \cup \{p/q\} \cup R_{p/q}$$

სადაც $L_{p/q} = \{r/s : r/s < p/q\}$ და $R_{p/q} = \{r/s : r/s > p/q\}$.

ყველა დანარჩენი რიცხვი, ე. ი. ისეთი, რომელიც არც ერთ წილადს არ უდრის, გააჩენს წილადების ასეთივე დაყოფას, ერთი განსხვავებით: შუაში არაფერი არ გვექნება. ანუ, თუ x რაიმე ირაციონალური (არარაციონალური) რიცხვია, $\mathbb{Q} = L_x \cup R_x$, სადაც $L_x = \{r/s : r/s < x\}$ და $R_x = \{r/s : r/s > x\}$.

ჟოზეფ ბერტრანისა და რიჰარდ დედეკინდის საოცარი მიგნება იყო, რომ ჩვენ შეგვიძლია ამ x-ებთან ვიმუშაოთ (შევკრიბოთ, გავყოთ, ერთმანეთს შევადაროთ და ა. შ.) ისე, რომ მხოლოდ მათ მიერ გაჩენილი ასეთი დაყოფები გამოვიყენოთ. ეს ძალიან ბევრ რამეს გვიადვილებს, იმიტომ რომ უმრავლესობა ასეთი x-ის შესახებ თითქმის არაფრის თქმაც არ შეგვიძლია. ამის შესახებ ალბათ გაგიგიათ, ოღონდ მოდით ზუსტად განვსაზღვროთ, თუ რაზეა ლაპარაკი.

II.11. განსაზღვრება

დედეკინდის კვეთა ეწოდება რაციონალური რიცხვების ისეთ დაყოფას სამ თანაუკვეთ ნაწილად

$$\mathbb{Q} = L \cup M \cup R$$

რომ ერთი მაინც წილადი p/q ხვდება L-ში, ერთი მაინც R-ში, და ამასთან $p/q \leq r/s$ ყოველი p/q-სათვის L-იდან ან M-იდან და ყოველი r/s-ისთვის M-იდან ან R-იდან.

დედეკინდის კვეთები მოფიქრებულია ისეთნაირად, თითქოს L იყოს ყველაფერი, რაც „რაღაცაზე" ნაკლებია, R ყველაფერი, რაც ამავე „რაღაცაზე" მეტია, ოღონდ თვითონ ეს „რაღაცა" შეიძლება არც არსებობდეს, ე. ი. შესაბამისი M ცარიელი იყოს. სწორედ მაგისთვის გვინდა კვეთების გაჩენა, რომ ყველა შესაძლო „რაღაცეებით" ამოვავსოთ ასეთი „ღრიჭოები" - ცარიელM-იანი კვეთები.

ბოლომდე ცხადი კი არ არის, რომ ეს ზუსტად ის არის რაც გვინდა. ცოტა უფრო რომ დავრწმუნდეთ ამაში:

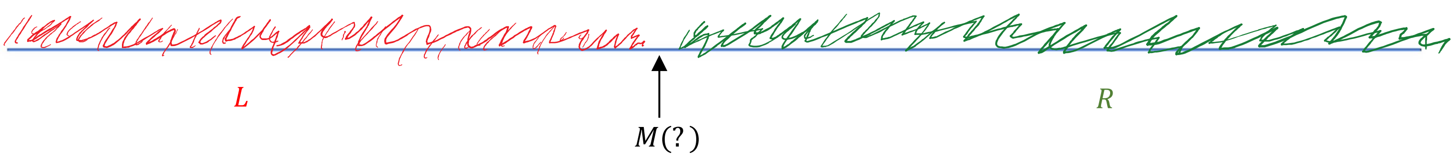
II.12. კითხვა

აჩვენეთ, რომ ყოველ დედეკინდის კვეთას გააჩნია ასეთი თვისებები:

M-ში არ შეიძლება ერთზე მეტი წილადი შედიოდეს. თუ მასში შედის რომელიმე m/n, მაშინ აუცილებლად L შედგება m/n-ზე ნაკლები ყველა წილადისგან, ხოლო R კი m/n-ზე მეტი ყველა წილადისგან.

თუ p/q შედის L-ში, მაშინ L-ში შევა ყველა p/q-ზე ნაკლები წილადიც; ასევე, თუ p/q შედის R-ში, მაშინ ყველა p/q-ზე მეტი წილადიც შედის R-ში.

ასე რომ სურათი მართლაც ისეთია, როგორიც გვინდა:



(აქ კითხვის ნიშანი იმიტომ დავსვი, რომ ამ M-იდან გამომავალი ისარი შეიძლება რაიმე წილადს მიუთითებდეს, მაგრამ შეიძლება ცარიელ ადგილსაც — ე. ი. ისეთ რიცხვს, რომელიც არც ერთ წილადს არ უდრის).

ეხლა გასაგებია, რომ წილადები ურთიერთცალსახა თანადობაშია ისეთ დედეკინდის კვეთებთან, რომლებისთვისაც შუა ნაწილი M არაცარიელია. და გვემატება კიდევ უამრავი $(L, \emptyset, R)$ სახის კვეთები. ამათ შესახებ ბევრი არაფერი ვიცით, მაგრამ თურმე ვიცით, ეს ყველა ძველი და ახალი კვეთა ერთად როგორ დავალაგოთ და როგორ ვაწარმოოთ მათზე საჭირო მოქმედებები.

დალაგება სულ იოლია: $(L, M, R) \leq (L', M', R')$ ნიშნავს უბრალოდ, რომ $L \subseteq L'$ (ან, რაც იგივეა, $R \supseteq R'$). წარმოსახვისთვის შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ ამ დროს (L, M, R)-ის შუაგული (ან ცარიელი, ან არა, სულ ერთია) ჩვენს მიერ დახატულ წრფეზე მდებარეობს (L', M', R')-ის შუაგულზე უფრო მარცხნივ.

შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას და გაყოფას ცოტა მუშაობა ჭირდება, თუმცა მთავარი მოსაზრება ძალიან მარტივია. მაგალითად, $(L_1, M_1, R_1) + (L_2, M_2, R_2) = (L, M, R)$ გვინდა განვსაზღვროთ ასეთნაირად: p/q მოხვდება L-ში, თუ ის წარმოდგება ჯამად $p_1/q_1 + p_2/q_2$, სადაც p_1/q_1 არის L_1-ში, ხოლო p_2/q_2 კი L_2-ში. ასეთივენაირად განვსაზღვრავთ R-ს, და მაშინ M ცალსახად განისაზღვრება: თუ რაიმე წილადი დაგვრჩა, რომელიც არც L-შია და არც R-ში, მოვათავსოთ ის M-ში, თუ არა და M ცარიელი იქნება.

II.13. კითხვა

შეკრების ასეთნაირი განსაზღვრა რომ მუშაობდეს, უნდა შემოწმდეს, რომ M-ში ერთზე მეტი წილადი ვერ მოხვდება. შეგიძლიათ დაასაბუთოთ, რომ ეს მართლაც ასეა?

II.14. კითხვა

შეიძლება მოხდეს, რომ $(L_1, M_1, R_1) + (L_2, M_2, R_2) = (L, M, R)$ ვითარებაში M_1 და M_2 ორივე ცარიელია, ხოლო M არაცარიელია?

შედარებით იოლად ჩანს, როგორ უნდა განვსაზღვროთ შეკრების აზრით მოპირდაპირე რიცხვი: ვსაზღვრავთ $-(L, M, R) = (-R, -M, -L)$, სადაც p/q არის $-R$-ში თუ $-p/q$ არის R-ში, და ასევე $-M$-ისა და $-L$-ისათვის.

ამის მერე გამოკლებაც ხელში გვაქვს: $(L_1, M_1, R_1) - (L_2, M_2, R_2) = (L_1, M_1, R_1) + (-(L_2, M_2, R_2))$.

სამწუხაროდ გამრავლება ცოტათი სახლაფორთოა იმის გამო, რომ უარყოფით რიცხვზე გამრავლება დალაგებას უკუღმა ატრიალებს. მოდით მე მაინც მოვიყვან აგებას, თუმცა მასზე ყურადღებას არ გავამახვილებ, რაც ნიშნავს, რომ კითხვებს მის შესახებ არ დაგისვამთ. ეს იმიტომ, რომ ცოტა ხანში კონვეის რიცხვებამდე რომ მივალთ, იქ გაცილებით უფრო ლამაზი გამრავლება დაგვხვდება.

მაშ ასე, ჯერ ვსაზღვრავთ $(L_1, M_1, R_1)(L_2, M_2, R_2) = (L, M, R)$-ს იმ შემთხვევაში, თუ (L_1, M_1, R_1)-იც და (L_2, M_2, R_2)-იც ორივე არაუარყოფითია. ჩვენ ხომ უკვე განვსაზღვრეთ კვეთების დალაგებაც და ისიც, თუ როგორ უნდა წარმოვადგინოთ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი კვეთის სახით, ამიტომ წესით უკვე უნდა ვიცოდეთ, რას ნიშნავს კვეთის არაუარყოფითობა. ადვილი შესამოწმებელია (თუ გინდათ, შეამოწმეთ), რომ ჩვენს შემთხვევაში ეს უბრალოდ ნიშნავს, რომ ყველა წილადი, რომელიც მოხვდება ან R_1-ში ან R_2-ში, დადებითია. ასეთ შემთხვევაში L-ში უნდა მოხვდეს ყველა უარყოფითი წილადიც და კიდევ ყველა $(p_1/q_1)(p_2/q_2)$, სადაც (p_1/q_1) რაიმე არაუარყოფითი წილადია L_1-დან, ხოლო (p_2/q_2) კი რაიმე არაუარყოფითი წილადი L_2-დან (თუკი ასეთები გვაქვს, რა თქმა უნდა). ბოლოს, ისევე როგორც შეკრებისთვის, M-ში მოვათავსებთ, თუკი რამე დაგვრჩა რაც არც L-შია და არც R-ში.

გამრავლების დარჩენილ შემთხვევებს უკვე ასეთნაირად მივხედავთ: როდესაც ორიდან ერთ-ერთი არაუარყოფითია, $\big(-(L_1, M_1, R_1)\big)(L_2, M_2, R_2) = (L_1, M_1, R_1)\big(-(L_2, M_2, R_2)\big) = -((L_1, M_1, R_1)(L_2, M_2, R_2))$ ხოლო თუ არცერთი არაა არაუარყოფითი, $\big(-(L_1, M_1, R_1)\big)\big(-(L_2, M_2, R_2)\big) = (L_1, M_1, R_1)(L_2, M_2, R_2)$.

ბოლოს, გაყოფისათვის ჯერ განვსაზღვროთ $1/(L, M, R) = (L', M', R')$, სადაც L'-ში შედის ყველა ისეთი p/q, რომლებისთვისაც q/p არის R-ში, R' კი პირიქით - ისეთი p/q, რომ q/p არის L-ში. და ბოლოს, გაყოფა: $(L_1, M_1, R_1)/(L_2, M_2, R_2)$ განვსაზღვროთ, როგორც $(L_1, M_1, R_1)(1/(L_2, M_2, R_2))$.

II.15. კითხვა

ალბათ გაგიჩნდათ რაღაც ეჭვი მაგ $1/(L, M, R)$-თან დაკავშირებით, თუ გაგახსენდათ, რომ ნულზე გაყოფა არ გამოდის. შეგიძლიათ გაარკვიოთ, რა მოსდის ნულს ამ დროს? ნული ხომ აუცილებლად არის სადმე, ან L-ში, ან M-ში ან R-ში, არ შექმნის ეს რამე პრობლემას?

ღრიჭოების ნაირსახეობები

დედეკინდის კვეთებით ახალი რიცხვების გაჩენა საშუალებას გვაძლევს დავაკვირდეთ ერთ შესანიშნავ მოვლენას. ის რიცხვები, რომლებიც ჩვენ გაგვიჩნდა, სრულიად სხვადასხვა ბუნებისაა. ზოგი მათგანი განტოლებების ამონახსნებია, მაგალითად $\sqrt{2}$ ან ისეთი x, რომ $x^5 = x^3 + 1$ (ეს არის მიახლოებით $1.236505703391499\ldots$, მისი დედეკინდის კვეთად წარმოდგენისთვის (L, M, R) L-ში ხვდება, მაგალითად, წილადები $1, \frac{21}{17}, \frac{68}{55}, \frac{183}{148}, \frac{481}{389}, \frac{1741}{1408}, \frac{41303}{33403}, \frac{122168}{98801}, \frac{4762811}{3851831}, \frac{61550039}{49777400}, \ldots$ ხოლო R-ში, მაგალითად, წილადები $\ldots, \frac{314059887}{253989841}, \frac{6309692}{5102841}, \frac{1546881}{1251010}, \frac{80865}{65398}, \frac{39562}{31995}, \frac{1260}{1019}, \frac{298}{241}, \frac{115}{93}, \frac{47}{38}, \frac{5}{4}$

ამავე დროს გვაქვს ისეთი სახელგანთქმული რიცხვებიც, როგორიცაა π ან e, რომლებიც ტრანსცენდენტულია, ანუ არანაირი რაციონალურკოეფიციენტებიანი განტოლების ფესვები არ არიან, და კიდევ უამრავი ყველასთვის უცნობი ტრანსცენდენტული რიცხვი, რომლებსაც რაიმე სიტყვიერი აღწერაც კი არ გააჩნიათ.

თურმე დამატებული რიცხვის ბუნებაზე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ იმის მიხედვით, თუ რა ხდება მის მახლობლად განლაგებულ წილადებში. კერძოდ, თურმე რაციონალური რიცხვების შესაბამისი კვეთებისათვის (L, M, R) შუაგულის მახლობლობაში გვხვდება უკვეცი წილადები გაცილებით უფრო დიდი მნიშვნელებით, ვიდრე ირაციონალური რიცხვებისათვის.

მართლაც, ავიღოთ რომელიმე ასეთი კვეთა $(L, \{p/q\}, R)$, სადაც ეს p/q რაიმე დადებითი უკვეცი წილადია, ე. ი. p და q თანამარტივი დადებითი მთელი რიცხვებია, და შევხედოთ, მაგალითად, L-ს, რომელიც შეიცავს ყველა p/q-ზე ნაკლებ წილადს. ავიღოთ რომელიმე x/y უკვეცი წილადი L-იდან და ვნახოთ, რამდენად ახლოს შეიძლება ის იყოს p/q-სთან, ე. ი. რამდენად მცირე შეიძლება იყოს სხვაობა $p/q - x/y$.

ცოტა უცნაურად კია კითხვა დასმული, რა თქმა უნდა ეს სხვაობა ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვი შეიძლება იყოს. უფრო ზუსტი იქნებოდა გვეთქვა, რამდენად მცირე x და y შეიძლება ვიმყოფინოთ იმისათვის, რომ p/q-სთან რაც შეიძლება ახლოს მივიდეთ. არც ესაა მაინც და მაინც ზუსტი ნათქვამი, მაგრამ მოდით ჯერ მაინც შევხედოთ ისეთ დადებით უკვეც x/y წილადებს L-დან, რომლებისთვისაც y არ აღემატება q-ს. ასეთების რაოდენობა სასრულია: მართლაც, შესაძლო დადებითი y-ების რაოდენობა სასრულია, და თითოეული მათგანისათვის მხოლოდ სასრული რაოდენობა x-ები მოიძებნება ისეთები, რომ x/y წილადი მოხვდება L-ში, ე. ი. იქნება p/q-ზე ნაკლები. ამრიგად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენი x/y ყველა ასეთებს შორის უდიდესია. მაშინ L-ში შემავალ ყველა უფრო დიდ უკვეც წილადს q-ზე დიდი მნიშვნელი ექნება.

მაგრამ თუ $y > q$, მაშინ სხვაობას $p/q - x/y$ დიდად ვერ შევამცირებთ y-თან შედარებით. მართლაც,

$$\frac{p}{q} - \frac{x}{y} = \frac{py - qx}{qy} > \frac{1}{qy} > \frac{1}{y^2}$$

ასე რომ ამ სხვაობას $1/y^2$-ზე მცირეს ვერ გავხდით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, p/q-სთან ძალიან ახლოს განლაგებული წილადების მნიშვნელები კვადრატულად იზრდება მიახლოების შემცირებასთან ერთად.

მინდა განახოთ ამ მოვლენის დასურათება, რომელიც ლესტერ ფორდმა მოიფიქრა ოცდაათიან წლებში. ფორდის წრე ეწოდება წრეს სიბრტყეზე, რომელიც ეხება რიცხვით ღერძს რაიმე უკვეც p/q წილადში, ხოლო მისი ცენტრი $1/(2q^2)$-ით ამ წილადის ზევითაა განლაგებული. ამრიგად ფორდის წრე მით უფრო დიდია, რაც უფრო პატარაა შესაბამისი წილადის მნიშვნელი.

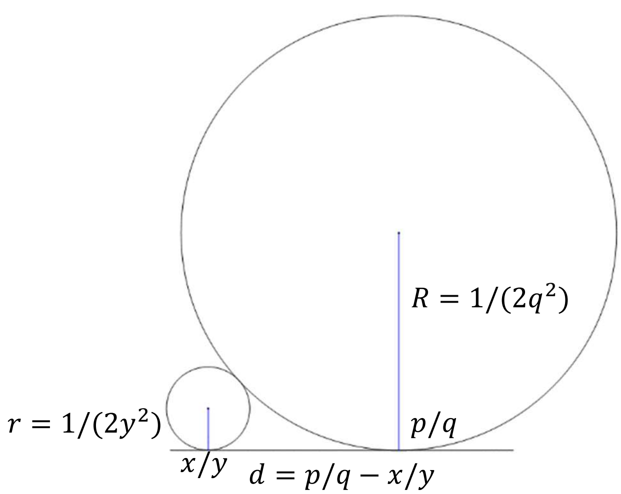
ფორდის წრეებს აქვთ ერთი შესანიშნავი თვისება: ორი სხვადასხვა ფორდის წრე ან ერთმანეთთან არ იკვეთება, ან ერთმანეთს ეხება.

II.16. კითხვა

შეგიძლიათ გაარკვიოთ, როდის ეხება ერთმანეთს p/q და r/s წილადების შესაბამისი ფორდის წრეები?

ფორდის წრეების ამ თვისების გამო წილადთან რაც შეიძლება ახლოს რაც შეიძლება მცირემნიშვნელიანი უკვეცი წილადების მოძებნის ამოცანა შეიძლება გეომეტრიულად ასე ითარგმნოს: მოვძებნოთ ამ წილადის ფორდის წრესთან რაც შეიძლება ახლოს რაც შეიძლება დიდი ფორდის წრე.

ფორდის წრეების ენაზე ის უტოლობა, რომელიც ასეთი ვაივაგლახით გამოვიყვანეთ, სულ იოლად ჩანს.

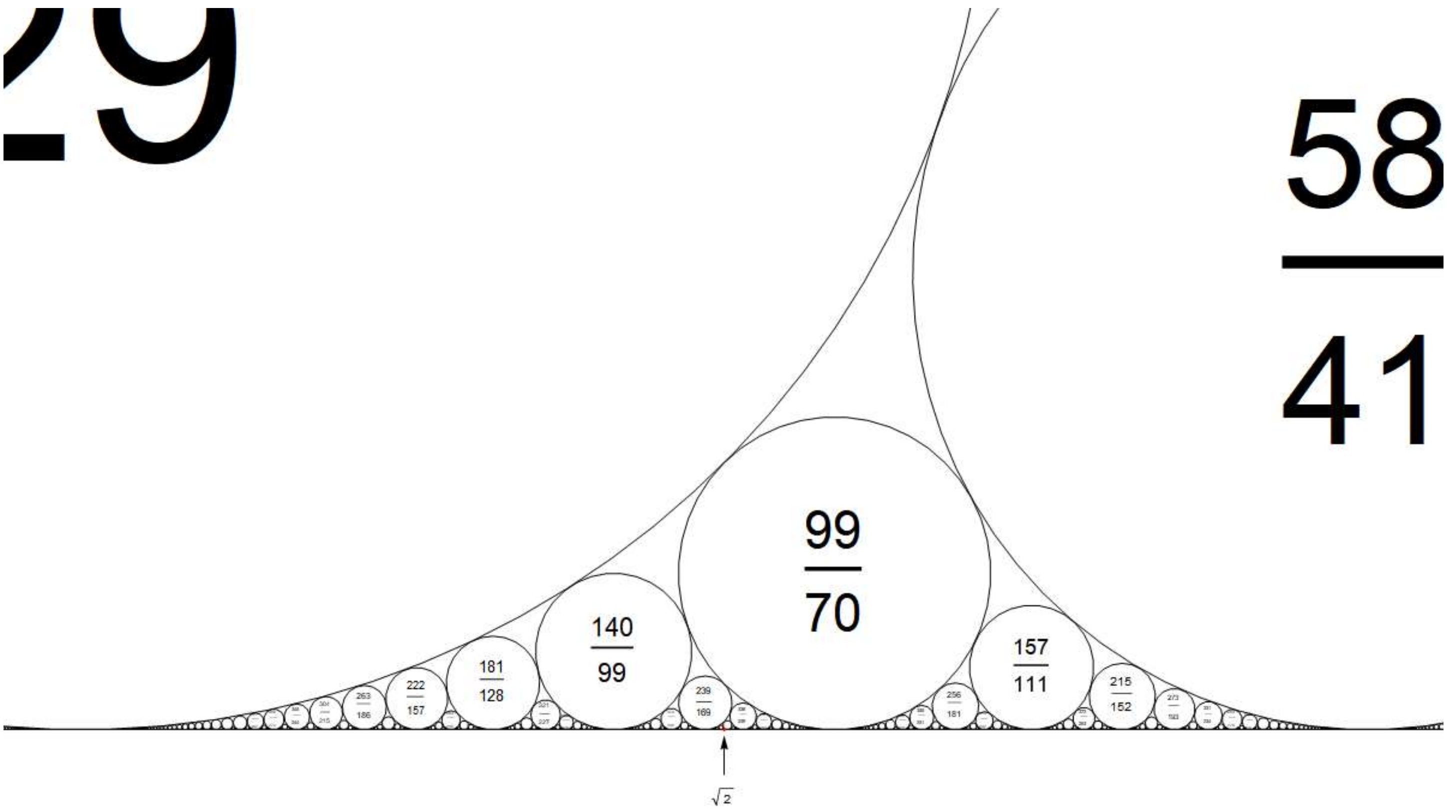


ამ ნახაზიდან გასაგებია, რომ სრულდება ტოლობა $d^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2$, საიდანაც $r = d^2/(4R)$. ასე რომ თუ

გვინდა, რომ წილადებს შორის მანძილი არ აღემატებოდეს d-ს, იძულებული ვართ ავიღოთ r, რომელიც არ აღემატება $d^2/(4R)$-ს.

სულ სხვა ვითარებაა დედეკინდის კვეთებისათვის (L, M, R) ცარიელი M-ით, ე. ი. ირაციონალური რიცხვებისათვის. ამ შემთხვევაში შუაში არ გვიზის არანაირი ფორდის წრე, რომელიც ხელს შეგვიშლიდა, და ამიტომ შუაგულის მახლობლად შედარებით დიდრადიუსიანი ფორდის წრეები თავსდება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ირაციონალური რიცხვის ახლოს უფრო მეტი პატარამნიშვნელიანი წილადები მოიძებნება, ვიდრე ამავე მანძილზე რაციონალური რიცხვის ახლოს.

აი მაგალითად რამდენიმე ფორდის წრე $\sqrt{2}$-ის მახლობლობაში.



თუმცა ჩვენ არ გვაქვს საშუალება დაწვრილებით ვიმუშაოთ ამ საკითხზე, მაინც მინდა გითხრათ, რომ არსებობს ზუსტი თეორემები ამის შესახებ. ერთ-ერთი ყველაზე ადრინდელი ასეთი თეორემა დაამტკიცა დირიხლემ. მან აჩვენა, რომ თუ რიცხვი a არ არის რაციონალური, მაშინ მისთვის მოიძებნება უსასრულოდ ბევრი ისეთი უკვეცი წილადი x/y, რომ

$$\left|a - \frac{x}{y}\right| < 1/y^2$$

არა და ჩვენი წინა მსჯელობიდან გამოდის, რომ თუ $a = p/q$ წილადია, ასეთი x/y-ების რაოდენობა მხოლოდ სასრულია.

არსებობს ამ თეორემის შემდგომი დაზუსტებები - კერძოდ, ირკვევა, რომ ტრანსცენდენტულ რიცხვებს გაცილებით უკეთესი წილადური მიახლოებები გააჩნიათ ალგებრულ რიცხვებთან შედარებით.

შეგიძლიათ აქვე გადმოტვირთოთ რამდენიმე ანიმაცია, რომელთა გაშვებაც შესაძლებელია, თუ თქვენ იყენებთ Adobe Readerს ან Adobe Acrobatს. ამ ანიმაციებში ნაჩვენებია, თუ როგორ გამოიყურება ფორდის წრეები სხვადასხვანაირი რიცხვების მიდამოებში. პირველი მათგანი რაციონალურია, და რაც უფრო ახლოს გვინდა მასთან ფორდის წრე განვათავსოთ, იძულებული ვართ ამ ახალი ფორდის წრის რადიუსი დაშორების

კვადრატის პროპორციულად შევამციროთ. მეორე არის ოქროს კვეთა $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, მისთვის მახლობელ ფორდის წრეებს შორის უფრო დიდები გვხვდება ვიდრე რაციონალური რიცხვისთვის იმავე მანძილზე. შემდეგია e, ის უპირატესად მახლობელი ფორდის წრეების შეხების წერტილებთან ახლოსაა განლაგებული. ბოლოს მოდის π, ზოგი მისი ფორდის წრე მოულოდნელად დიდია შეხების წერტილიდან დაშორებასთან შედარებით.

გადიდების ჩასართავად გაშვების ღილაკზე უნდა დააწკაპოთ.

დამატებითი კითხვები

1. $\mathbb{F}_{23}$ ველში შემავალი რიცხვები წარმოვადგინოთ ნაშთებით $-11, -10, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 11$. რომელი მათგანი წარმოადგენს ამ ველში 5/7-ს?

2. $\mathbb{F}_3$ ველში არ არსებობს „წარმოსახვითი ერთეული" $i = \sqrt{-1}$, ე. ი. განტოლებას $x^2 + 1 = 0$ ამონახსნი არ გააჩნია. $\mathbb{F}_3$-ს რომ ამ განტოლების ამონახსნი მივუერთოთ, მივიღებთ 9 რიცხვისგან შემდგარ ველს $\mathbb{F}_3[i]$. თურმე ამ ველში მოიძებნება ისეთი რიცხვი u, რომ მისი ხარისხები $1, u, u^2, u^3, u^4, \dots$ ამოწურავენ მთელს $\mathbb{F}_3[i]$ ველს - უფრო ზუსტად, $\mathbb{F}_3[i]$-ს ყოველი არანულოვანი ელემენტი ტოლია u რიცხვის რომელიღაც ხარისხის. შეგიძლიათ იპოვოთ ასეთი u?

3. შეამოწმეთ, რომ დედეკინდის კვეთების გამრავლების აზრით ნამრავლი $(-1)(L, M, R)$ იგივეა, რაც ჩვენს მიერ განსაზღვრული $-(L, M, R)$.

4. როდესაც დირიხლეს თეორემა ვახსენეთ, ჩვენ დამტკიცების გარეშე ვთქვით ასეთი რამ: ყოველი p/q უკვეცი წილადისათვის ისეთი x/y უკვეცი წილადების რაოდენობა, რომ $|p/q - x/y| < 1/y^2$, არაუმეტეს სასრულია. მართალია, მანამდე ვნახეთ, რომ თუ ეს უტოლობა სრულდება, მაშინ y არ აღემატება q-ს, მაგრამ ისეთი უკვეცი წილადების რაოდენობა, რომელთა მნიშვნელი არ აღემატება q-ს ხომ მაინც უსასრულოა? აჩვენეთ, რომ მიუხედავად ამისა აღნიშნული უტოლობის დამაკმაყოფილებელ x/y-თა რაოდენობა მაინც არაუმეტეს სასრულია ყოველი p/q-სათვის.