დებულებათა ლოგიკის გამოყვანის სისტემა

ამ თემის წინა ნაწილში ზოგადად **ფორმალურ გამოყვანის სისტემებზე** ვისაუბრეთ და რამდენიმე მარტივი მაგალითიც განვიხილეთ. ამ დასკვნით ნაწილში საუბარი გვექნება კონკრეტულ გამოყვანის სისტემაზე, რომელიც მათემატიკური დამტკიცების ცნებას უკავშირდება და ბუნებრივი მათემატიკური მსჯელობის ლოგიკური აგებულების გამარტივებულ, თუმცა ზუსტ მოდელს წარმოადგენს. ამ ფორმალურ სისტემას პირობითად **დელოგა**[1] დავარქვათ. სანამ დელოგას გავეცნობით, გავიხსენოთ გამოყვანის სისტემის ზოგადი მახასიათებლები და წინა ნაწილში განხილული ერთი მაგალითი.

ფორმალური გამოყვანის სისტემის კომპონენტებია ფორმალური ენა და გამოყვანის წესები. ფორმალური გამოყვანა სინტაქსურია – თავად მას მხოლოდ ფორმა, ანუ აგებულება „აინტერესებს“. თუმცა ხშირად გამოყვანის სისტემა იმისათვის გვჭირდება, რომ გარკვეული შინაარსების, საზრისების მოწესრიგებაში დაგვეხმაროს. იმისათვის, რომ ფორმალური ენის ჩანაწერებმა საზრისი შეიძინონ, საჭიროა გარკვეული ბმა ფორმასა და შინაარსს შორის. ასეთ ბმას **ინტერპრეტაცია** ეწოდება. ინტერპრეტაცია წარმოადგენს თანმიმდევრულ წესს, რომლის საშუალებითაც ფორმალურ ჩანაწერს შინაარსი ეთანადება[2]. მოდით, კონკრეტულ მაგალითზე ვნახოთ, რა არის ინტერპრეტაცია.

წინა ნაწილში განხილულ ბოლო მაგალითში (მაგალითი 2.3) შეგვხვდა ფორმალური ენა, რომლის ტერმებიც აგებული იყო $\{e, g, u\}$ სიმბოლოების საშუალებით ოღონდ ისე, რომ იქ ზუსტად ერთხელ უნდა შეგვხვედროდა სიმბოლო u. მაგალითად, ამ ენის ტერმი იქნებოდა $eegeeueeee$. განვიხილოთ ასეთი ტერმების ინტერპრეტაცია, რომელიც თითოეულ მათგანს არითმეტიკულ ტოლობად გადააქცევს. კერძოდ, მოდით u სიმბოლო „წავიკითხოთ“, როგორც ტოლობის ნიშანი $=$, სიმბოლო g „წავიკითხოთ“, როგორც მიმატების ნიშანი $+$, ხოლო e სიმბოლოების უწყვეტი მიმდევრობა e^n (რომელიც გვხვდება დასაწყისში, ბოლოში ან u და g სიმბოლოებს შორის) „წავიკითხოთ“, როგორც რიცხვი[3] n.

ასეთი წაკითხვისას ამ ენის თითოეული ტერმი რიცხვითი შეკრების ტოლობად გადაიქცევა. აი რამდენიმე მაგალითი ჩვენი ენის ტერმებისა და მათი შესაბამისი ინტერპრეტაციისა, საიდანაც ამ ინტერპრეტაციის რაობა გასაგები უნდა გახდეს:

---

[1] **დელოგა** = **დე**ბულებათა **ლო**გიკის **გა**მოყვანის სისტემა

[2] ხშირად ერთი და იმავე ფორმალური ჩანაწერის სხვადასხვაგვარად ინტერპრეტირებაა შესაძლებელი და მათემატიკაში ეს მოვლენა ზოგჯერ საკმაოდ მოულოდნელ და იდუმალ ურთიერთკავშირს ხდის ფარდას. ასეთი ურთიერთკავშირების გამოვლენით განსაკუთრებით ცნობილია მათემატიკის ერთ-ერთი შედარებით ახალი, თუმცა მრავლისმომცველი დარგი – **კატეგორიათა თეორია**.

[3] აქ დამატებით დასაზუსტებელია შემთხვევები, როდესაც ტერმი იწყება ან სრულდება u ან g სიმბოლოთი, ან ეს სიმბოლოები ზედიზედ მოსდევს ერთმანეთს – ასეთ დროს ვგულისხმობთ, რომ $n = 0$.

ტერმი	ინტერპრეტაცია
$egeuee$	$1+1=2$
$eegeueee$	$2+1=3$
$eegeeueeee$	$2+2=4$
$egegeeeeueeegeeeee$	$1+1+4=3+5$
$ggeeeegeeugeeege$	$0+0+4+2=0+3+1$

როგორც ვხედავთ, სიმბოლოების „უშინაარსო“ მიმდევრობებმა ინტერპრეტაციის შემდეგ ჩვენთვის ნაცნობი და გასაგები საზრისი შეიძინეს. თითოეული მათგანი თურმე არითმეტიკულ ტოლობას გამოსახავს, ოღონდ ზოგი – ჭეშმარიტ ტოლობას, ზოგი კი – მცდარს. დაკვირვებული მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ გამოყვანის წესები:

წ1. $\boldsymbol{xgy} \Rightarrow \boldsymbol{xgeye}$

წ2. $\boldsymbol{xgy} \Rightarrow \boldsymbol{xegye}$

ისეა მოწყობილი, რომ ამ წესების გამოყენებით ტერმიდან $egeuee$ (ანუ ტოლობიდან $1+1=2$) ყოველთვის ჭეშმარიტ ტოლობებს მივიღებთ და უფრო მეტიც, ორი ნატურალური რიცხვის შეკრების ყველა ჭეშმარიტი ტოლობა $m+n=k$ გამოყვანადი იქნება.

სიმარტივის შესანარჩუნებლად, გამოყვანის წესები თავიდანვე იმ ფორმით არ ჩამოვაყალიბეთ, რომ **ნებისმიერი** ჭეშმარიტი ტოლობიდან ამ წესების გამოყენებით **მხოლოდ და მხოლოდ** ჭეშმარიტი ტოლობების მიღება ყოფილიყო შესაძლებელი, თუმცა ასეთი მოდიფიცირება სულაც არ არის რთული. მართლაც, თუ ასეთ წესს განვიხილავთ:

წ3. $\boldsymbol{xuy} \Rightarrow \boldsymbol{xeuye}$

მაშინ, ჩვენი ინტერპრეტაციის თანახმად, ეს წესი ჭეშმარიტი ტოლობიდან ყოველთვის ჭეშმარიტ ტოლობას გამოიყვანს (რატომ?). თუმცა ამ წესის გამოყენებით, შესაძლოა, ყველა ჭეშმარიტი ტოლობა $m+n=k$ ვეღარ მივიღოთ საწყისი $1+1=2$ ტოლობიდან. მაგალითად, ტოლობა $2+2=4$ აღარ „გამომდინარეობს“, თუმცა ტოლობა $1+3=4$ – კი (შეეცადეთ დაინახოთ, თუ რატომ არის ეს ასე). შესაძლებელია წესების ისე ჩამოყალიბებაც, რომ ორივე „სასურველი“ პირობა დაკმაყოფილდეს. ასეთი წესების მოფიქრება თქვენთვის მოგვინდვია:

სავარჯიშო 3.1: მოცემული ენისათვის ჩამოაყალიბეთ ისეთი გამოყვანის სისტემა, რომ აღწერილი ინტერპრეტაციის პირობებში სრულდებოდეს ორი მოთხოვნა: 1) შეუძლებელი იყოს ჭეშმარიტი ტოლობიდან მცდარი ტოლობის გამოყვანა; და 2) ტერმიდან u (ანუ ტოლობიდან $0=0$) გამოყვანადი იყოს **ნებისმიერი** ჭეშმარიტი ტოლობა, სადაც ტოლობის ნიშნის მარცხნივ და მარჯვნივ ნატურალური რიცხვების სასრული შეკრებაა ჩაწერილი.

ინტერპრეტაციის ცნება უაღრესად მნიშვნელოვანია, თუ გვსურს, რომ ფორმალური გამოყვანა უბრალო ფორმალობად, ანუ ჩანაწერების მეთოდურ მანიპულაციად კი არ დარჩეს, არამედ შინაარსიანი, სასარგებლო საქმის შესასრულებლადაც გამოდგეს. გარკვეული აზრით, ციფრული მოწყობილობების (კომპიუტერის, სმარტფონის და ა.შ.) „შინაგანი“ მოქმედება სწორედ ტერმების (სინამდვილეში 0-ებისა და 1-ების მიმდევრობების) მეთოდურ მანიპულაციამდე დაიყვანება, თუმცა ინტერპრეტაციის შედეგად ეს ციფრული ჩანაწერები ჩვენთვის შინაარსიან ფორმად (ტექსტად, გამოსახულებად, ბგერად) გარდაიქმნება და ასე ასრულებს სასარგებლო ფუნქციას. ეს ტექსტიც, ახლა რომ კითხულობთ, ოდესღაც (ალბათ სულ ცოტა ხის წინ) 0-ებითა და 1-ებით „ჩაწერილი“ ერთი დიდი ტერმი იყო.

დებულებათა ლოგიკის შინაარსი

ინტერპრეტაცია, ანუ სიმბოლოებსა და შინაარსებს შორის კავშირის დამყარება ცალმხრივი პროცესი არ არის. ხშირად სწორედ შინაარსი გვკარნახობს იმ ფორმას, რომელიც ამ შინაარსის ჩასაწერად, მისი ფორმალიზებისთვის გამოდგება. ფორმალური ენის შექმნაც და გამოყვანის წესების ჩამოყალიბებაც ხშირად გარკვეული ინტუიციით არის ნასაზრდოები. ეს ინტუიცია მაშინაც გვეხმარება, როდესაც შედეგად მიღებული გამოყვანის სისტემით სარგებლობა, ანუ წმინდად სინტაქსური მანიპულაციების ჩატარება გვჭირდება. დებულებათა ლოგიკის გამოყვანის სისტემა სწორედ ასეთი შემთხვევაა. სანამ ფორმალურ აპარატს შემოვიტანდეთ, სასარგებლო იქნება იმაზე ვისაუბროთ, რა მიზნით, რა შინაარსის ფორმალიზებისთვის არის საჭირო ამ სისტემის შემოტანა.

პირველ რიგში თავად ცნება „დებულება“ განვიხილოთ. მათემატიკაშიც და ყოფით ლაპარაკშიც ხშირად გვხვდება გამონათქვამები, რომლებიც რაიმეს მტკიცებითი ფორმით ამბობენ. მაგალითად:

1. 3 კენტი რიცხვია.
2. ნებისმიერი ლუწი რიცხვი ორი მარტივი რიცხვის ჯამად წარმოდგება.
3. ჯამი ჭურჭელია.
4. მცხეთა საქართველოს დედაქალაქია.
5. ამერიკის შეერთებული შტატების მომავალი პრეზიდენტი ჟღალთმიანია.

ასეთი გამონათქვამები, როგორც წესი, თხრობითი წინადადებებია, სადაც დასრულებული აზრია გამოთქმული და თან ნაგულისხმევია, რომ ეს აზრი სიმართლეა, ჭეშმარიტია. მართლა ჭეშმარიტია თუ არა კონკრეტული გამონათქვამი, ეს შეიძლება კონკრეტულ სიტუაციაზე იყოს დამოკიდებული (მაგალითად, (4) წარსულში ჭეშმარიტი იყო, მაგრამ დღეს

მცდარია), შეიძლება გარკვეული და ცხადი იყოს (როგორც (1) და (3)) და შეიძლება მისი სტატუსი არც კი იყოს ცნობილი ან გარკვეული (როგორც (2)-ისა და (5)-ის შემთხვევაში), მაგრამ თუკი ისეთი აზრია გამოთქმული, რომელიც **პრინციპულად შესაძლებელია**, რომ იყოს ან ჭეშმარიტი, ან მცდარი, მაშინ ასეთ გამონათქვამს დებულებას ვუწოდებთ.

მაშ, **დებულება** არის თხრობითი წინადადება, რომელიც ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.

ამ ინტუიტიურ განსაზღვრებაში ნაგულისხმევია ფუნდამენტური პრინციპი – **ორფასობა** – რომლის თანახმადაც დებულება ზუსტად ერთი მნიშვნელობისაა ამ ორიდან – ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი[4].

ზოგჯერ წინადადება „აწყობილია“ სხვა, უფრო მარტივი წინადადებებით. შეიძლება გვახსოვდეს გრამატიკიდან რთული (თანწყობილი და ქვეწყობილი) წინადადების ცნება. ჩვენთვის საინტერესოა ისეთი შემთხვევები, როდესაც „აწყობა“ **ლოგიკური მაკავშირებლების** დახმარებით ხდება, ანუ წინადადებას ლოგიკური აგებულება გააჩნია.

მაგალითისთვის, განვიხილოთ წინადადება:

„თუ n ლუწია და m კენტია, მაშინ $n+m$ ლუწი არ არის.“

ამ წინადადებაში შეგვიძლია გამოვყოთ სამი „ქვეწინადადება“, რომლებიც ერთმანეთთან ლოგიკურად არის დაკავშირებული და თან თითოეული, თავის მხრივ, წინადადებებს აღარ „შეიცავს“. ამ სამი „ქვეწინადადებიდან“ მთლიანი წინადადების ასაგებად გამოყენებულია კავშირები „თუ ..., მაშინ...“, „და“, „არა“. კერძოდ, განხილულ წინადადებას ასეთი ლოგიკური აგებულება აქვს:

„თუ A და B, მაშინ არა C.“

ჩვენი მიზანია, ისეთი ფორმალური ენა შემოვიღოთ, სადაც სწორედ ეს ლოგიკური აგებულება იქნება დაზუსტებული.

---

[4] არ განიხილება ანომალური შემთხვევები, როდესაც წინადადება არც ჭეშმარიტია და არც მცდარი, ან როდესაც წინადადება ერთდროულად ჭეშმარიტიც არის და მცდარიც. ასეთი უცნაური შემთხვევები თითქოს არც უნდა არსებობდეს ბუნებაში, მაგრამ ბუნებრივ ენაში შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი თვითმიმართებითი პარადოქსები, როგორიცაა „ეს წინადადება მცდარია“. ასეთი წინადადება, თუ დავუშვებთ, რომ ჭეშმარიტია – მცდარი გამოდის; ხოლო თუ დავუშვებთ, რომ მცდარია – ჭეშმარიტი გამოდის. ამიტომ მსგავს (საინტერესო, მაგრამ პრობლემურ) თხრობით წინადადებებს უბრალოდ არ მივიჩნევთ დებულებებად.

დელოგა – ფორმალური ენა

დელოგას **ფორმალური ენის** სიმბოლოები (ანბანი) იქნება:

ლათინური (ინდექსირებული) ასოები: $A, B, C, D, \dots, A_1, A_2, \dots$

პუნქტუაციის ფრჩხილები: ( )

ლოგიკური მაკავშირებლები: ∧ ∨ → ¬

A, B, C, D,... ასოებით უმარტივეს დებულებებს აღვნიშნავთ და მათ **საწინადადებო ცვლადებს** ვუწოდებთ. ლოგიკური მაკავშირებლების ნაგულისხმევი ინტერპრეტაცია კი ასეთია:

სიმბოლო	დასახელება	ინტერპრეტაცია
∧	კონიუნქცია	„და“
∨	დისიუნქცია	„ან“
→	იმპლიკაცია	„თუ ..., მაშინ ...“
¬	უარყოფა	„არა“

დელოგას ფორმალური გრამატიკა განსაზღვრავს ამ სიმბოლოებით აგებულ **ფორმულებს**, რომლებსაც პირობითად X, Y, Z სიმბოლოებით აღვნიშნავთ და რომელთა წარმოების წესიც შემდეგია:

1. ნებისმიერი პროპოზიციული ცვლადი ფორმულაა.
2. თუ X და Y ფორმულებია, მაშინ ასევე ფორმულებია (¬X), (X∧Y), (X∨Y) და (X→Y).

ამ გრამატიკის მიხედვით, დელოგას ფორმულებია, მაგალითად:

(A∧B)
(A∧B)∨(¬C)
(((A∧B)∨(¬C)) → A)

თუმცა დელოგას ფორმულები არაა, მაგალითად:

(A∧∨B)
A∨(¬)
(A∧B)∨(¬C → A

პუნქტუაციის ფრჩხილების დასმა საჭიროა ორაზროვნების თავიდან ასაცილებლად, თუმცა ხშირად ჭარბი ფრჩხილების გამო ფორმულის აღქმა გართულებულია, ამიტომ

მოსახერხებელია გარკვეული შეთანხმებების შემოღება, რომელთა საშუალებითაც ჩანაწერს შევამოკლებთ და უფრო წაკითხვადს გავხდით. მიღებული შეთანხმებაა, რომ უარყოფის ოპერაცია ყველაზე „ძლიერია“, სიძლიერით შემდეგია კონიუნქციისა და დისიუნქციის ოპერაციები, ხოლო ყველაზე „სუსტია“ იმპლიკაციის ოპერაცია. ანალოგიისათვის გავიხსენოთ არითმეტიკული ოპერაციების საშუალებით ჩაწერილი გამოსახულებები. როგორც გამოსახულებაში $3 \cdot 5 + 7 \cdot -2$ ვგულისხმობთ, რომ „ჯერ გამრავლება უნდა შესრულდეს, შემდეგ კი მიმატება“, ანუ ფრჩხილები წესით ასე უნდა დაისვას: $(3 \cdot 5) + (7 \cdot (-3))$, ასევე ფორმალურ გამოსახულებაში $(A \wedge B) \vee \neg C \rightarrow A$ ზემოთ აღწერილი შეთანხმების მიხედვით იგულისხმება, რომ „ჯერ ფრჩხილებში მოცემული კონიუნქცია უნდა შესრულდეს, შემდეგ უარყოფა, შემდგომ ამათი დისიუნქცია და ბოლოს კი იმპლიკაცია“, ანუ ფრჩხილები ასე უნდა აღდგეს: $(((A \wedge B) \vee (\neg C)) \rightarrow A)$ რაც დელოგას გრამატიკით აგებულ ფორმულას მოგვცემს.

შევნიშნოთ, რომ დისიუნქციისა და კონიუნქციის გვერდიგვერდ მოქცევის შემთხვევაში ფრჩხილების დასმა აუცილებელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩანაწერი $A \wedge B \vee C$ ორაზროვანი იქნებოდა და ვერ გავიგებდით, $((A \wedge B) \vee C)$ იგულისხმება თუ $(A \wedge (B \vee C))$. არადა, ალბათ დაგვეთანხმებით, რომ „წვიმს და (თბილა ან ქარია)“ სხვა რამეს ამბობს, ხოლო „(წვიმს და თბილა) ან ქარია“ – სხვას. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ ზამთარია, მზე ანათებს, არ წვიმს, მაგრამ ქარი ქრის და ცივა. მაშინ პირველი დებულება მცდარი იქნება, ხოლო მეორე – ჭეშმარიტი, არა?

ჩვენ არ დაგვიზუსტებია, როგორ არის დამოკიდებული რთული დებულების ჭეშმარიტობა/მცდარობა მისი შემადგენელი დებულებების ჭეშმარიტობა/მცდარობაზე. ფორმალური მანიპულაციებისთვის ამას მნიშვნელობა არ აქვს, მაგრამ თუ გვინდა, რომ ჩვენი ნაგულისხმევი ინტერპრეტაცია რთულ დებულებებზეც გავრცელდეს, ასეთი დაზუსტება აუცილებელია.

- **$\neg X$ ჭეშმარიტია** მხოლოდ მაშინ, როცა **X მცდარია**;
- **$X \wedge Y$ ჭეშმარიტია** მხოლოდ მაშინ, როცა **X-იც ჭეშმარიტია და Y-იც**;
- **$X \vee Y$ მცდარია** მხოლოდ მაშინ, როცა **X-იც მცდარია და Y-იც**;
- **$X \rightarrow Y$ მცდარია** მხოლოდ მაშინ, როცა **X ჭეშმარიტია, ხოლო Y – მცდარი**;

ბოლო პირობა ალბათ გარკვეულ განმარტებას საჭიროებს. იმპლიკაციის ინტერპრეტაციას ჩვენ ვაფიქსირებთ, როგორც ე.წ. „პირობით დებულებას“, სადაც **პირობა** „თუ A, მაშინ B“ ითვლება **დარღვეულად** მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ A შესრულდა (ჭეშმარიტია), ხოლო B კი დაირღვა (მცდარია). სხვა შემთხვევებში (თუ A არ შესრულებულა, ან თუ B არ დარღვეულა) პირობა არ ითვლება დარღვეულად და – ორფასობის პრინციპის თანახმად – ჭეშმარიტი გამოდის. ახლა კი დროა გამოყვანის წესების განხილვაზე გადავიდეთ.

დელოგა – გამოყვანის წესები

დელოგას ბევრი გამოყვანის წესი აქვს, თუმცა ყველა მათგანი ინტუიტიურად გასაგები იქნება, თუკი ჩვენს ინტერპრეტაციას მოვიშველიებთ. წესებს ეტაპობრივად შემოვიტანთ, გზადაგზა კი ამ წესების გამოყენების რამდენიმე მაგალითს განვიხილავთ.

გამოყვანის წესები ლოგიკური მსჯელობის უმარტივესი სქემებია, რომელთა საშუალებითაც დამტკიცებაში „ნაბიჯის გადადგმა“ შეგვიძლია. ჩვენი ამოცანაა აღვწეროთ ის უმარტივესი სვლები, რომელთა გზითაც ჭეშმარიტი დებულებებიდან ახალი ჭეშმარიტი დებულება მიიღება. როგორც რთული დებულება არის აწყობილი უმარტივესი დებულებებიდან ლოგიკური მაკავშირებლების მეშვეობით, ასევე რთული, მრავალსვლიანი დამტკიცებაც უმარტივესი ლოგიკური ნაბიჯებით – გამოყვანის წესებით – აეწყობა.

დამტკიცება, გარკვეულწილად, საჭადრაკო პარტიას ჰგავს. თამაშის წესები – ფიგურებით დასაშვები სვლები – საკმაოდ მარტივია და მკაფიოდ არის განსაზღვრული, მათი მეშვეობით კი ნებისმიერი საწყისი პოზიციიდან შეიძლება სხვადასხვა, ხშირად საკმაოდ რთული პარტიის გათამაშება. თუ სათამაშო დაფას და ფიგურებს ფორმალურ ენასა და მის გრამატიკას შევადარებთ, ხოლო ჭადრაკის წესებს – ფორმალური გამოყვანის წესებს, მაშინ საჭადრაკო პარტია შეგვიძლია ფორმალურ დამტკიცებას შევადაროთ. ეს ანალოგია აბსოლუტურად ზუსტი არ არის, მაგრამ საკმარისად მეტყველია და მომავალშიც გამოგვადგება.

დელოგას წესების ჩაწერისას ოდნავ განსხვავებული ფორმატით ვისარგებლებთ. თითოეულ გამოყვანის წესს ექნება ერთი, რამდენიმე, ან არცერთი **წანამძღვარი** – ეს ის დებულებებია, რომელთა *საფუძველზეც* ვდგამთ ლოგიკურ ნაბიჯს, და ერთადერთი **დანასკვი** – ეს ის დებულებაა, რომელიც ლოგიკური ნაბიჯის გადადგმის *შედეგია*. ცხადია, დელოგას შემთხვევაში იგულისხმება, რომ წანამძღვრების ჭეშმარიტების შემთხვევაში დანასკვი აუცილებლად ჭეშმარიტი უნდა გამოდიოდეს.

გამოყვანის წესს ასე გამოვსახავთ: ჰორიზონტალურ ხაზს ზემოთ დავწერთ ამ წესის წანამძღვრებს, ხოლო ხაზს ქვემოთ დავწერთ წესის დანასკვს. ქვემოთ მოცემულია ორწანამძღვრიანი გამოყვანის წესის ზოგადი სქემა:

$$\frac{\text{ერთი წანამძღვარი} \quad \text{მეორე წანამძღვარი}}{\text{დანასკვი}}$$

მოდით, რამდენიმე ასეთი წესი შემოვიღოთ. იგულისხმება, რომ X, Y დელოგას ნებისმიერი ფორმულებია. ყოველ წესს მისი ტრადიციული სახელი და ლათინური შემოკლება აწერია:

მოდუს პონენსი (MP)	მოდუს ტოლენსი (MT)	ჰიპოთეტური სილოგიზმი (HS)	დისიუნქციური სილოგიზმი (DS)
$\dfrac{X\to Y \quad X}{Y}$	$\dfrac{X\to Y \quad \neg Y}{\neg X}$	$\dfrac{X\to Y \quad Y\to Z}{X\to Z}$	$\dfrac{X\vee Y \quad \neg X}{Y}$

როგორ შეიძლება ამ წესების გამოყენება? მათი საშუალებით შეგვიძლია ვაწარმოოთ **ფორმალური დამტკიცებები**. საზოგადოდ, ფორმალური დამტკიცება წარმოადგენს დასაბუთებას, რომ გარკვეული $X_1, X_2, \dots, X_n$ წანამძღვრებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს დანასკვი Y.

ეს დასაბუთება იწყება $X_1, X_2, \dots, X_n$ წანამძღვრებით და დასაბუთების ყოველი მომდევნო წევრი მიღებული უნდა იყოს წინა წევრებისგან რომელიმე გამოყვანის წესის მეშვეობით. ასე აგებული დასაბუთების ბოლო დებულებას უნდა წარმოადგენდეს დანასკვი Y. თუკი ასეთი, წესების მიხედვით აგებული დასაბუთება არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ $X_1, X_2, \dots, X_n$ -დან **მართებულად გამომდინარეობს** Y, ან ჩავწერთ, რომ $X_1, X_2, \dots, X_n \vdash Y$.

მაგალითად, უკვე შემოტანილი წესების საშუალებით შეგვიძლია დავასაბუთოთ, რომ:

$$A\to\neg B,\ C\to B,\ A\ \vdash \neg C$$

ეს დასაბუთება (ამ გამომდინარეობის ფორმალური დამტკიცება) ასე ჩაიწერება:

ნაბიჯი	ფორმულა	დასაბუთება	განმარტება
1	$A\to\neg B$	წ	წანამძღვარი
2	$C\to B$	წ	წანამძღვარი
3	A	წ	წანამძღვარი
4	$\neg B$	MP:1,3	წესი MP, გამოყენებული 1-ლ და მე-3 ფორმულებზე
5	$\neg C$	MT:2,4	წესი MT, გამოყენებული 1-ლ და მე-3 ფორმულებზე

როგორც დასაბუთების „პროტოკოლიდან“ ჩანს, წანამძღვრებიდან დანასკვამდე „მისვლას“ ორი „სვლა“ დასჭირდა: ჯერ მოდუს პონენსის წესი გამოვიყენეთ 1-ლ და მე-3 წანამძღვარზე და მივიღეთ ახალი ფორმულა $\neg B$, ხოლო ამ ახალი ფორმულისა და მე-2 წანამძღვრის საფუძველზე, მოდუს ტოლენსის წესის დახმარებით, მივიღეთ სასურველი დანასკვი $\neg C$.

თუკი ჭადრაკის პარტია „ოფიციალურად“ გითამაშიათ, ალბათ გაგახსენდებოდათ საჭადრაკო პარტიის ჩაწერის ნოტაცია – ჭადრაკის პარტიის სვლებიც თანმიმდევრულად,

ნაბიჯ-ნაბიჯ ჩაიწერება ხოლმე იმის მითითებით, რომელმა ფიგურამ რომელი უჯრიდან რომელზე გადაინაცვლა. საჭადრაკო ამოცანები ან გათამაშებული პარტიის ფრაგმენტები ხშირად ასეც არის ჩაწერილი – ჯერ აღწერილია საწყისი პოზიცია, ხოლო შემდეგ მითითებულია რამდენიმე სვლა, რომელთაც ამ საწყისი პოზიციიდან საბოლოო პოზიციამდე მივყავართ.

განვიხილოთ კიდევ ერთი „პარტიის“ ჩანაწერი. ამჯერად „საწყის პოზიციად“ მოცემულია წანამძღვრები $A\to B, A\vee C, \neg B, C\to(B\to D)$ ხოლო „სასურველი საბოლოო პოზიციაა“ დანასკვი $A\to D$. დელოგას ენაზე რომ ვთქვათ, საჭიროა დასაბუთდეს გამომდინარეობა:

$$A\to B, A\vee C, \neg B, C\to(B\to D) \vdash A\to D$$

აი შესაბამისი ფორმალური დამტკიცებაც (ანუ საჭირო სვლების ზუსტი მიმდევრობა):

1.	$A\to B$	წ
2.	$A\vee C$	წ
3.	$\neg B$	წ
4.	$C\to(B\to D)$	წ
5.	$\neg A$	MT:1,3
6.	C	DS:2,5
7.	$B\to D$	MP:4,6
8.	$A\to D$	HS:1,7

ალბათ უკვე გასაგებია, თუ როგორ „მუშაობს“ ფორმალური დამტკიცება. თითოეული წესი საშუალებას გვაძლევს, უკვე მიღებული ფორმულებიდან ახალი ფორმულა გამოვიყვანოთ. რაც უფრო მეტი ასეთი წესი გვექნება, მით უფრო მეტი სხვადასხვა შედეგის მიღებას მოვახერხებთ მათი დახმარებით. განვიხილოთ წესების მომდევნო ოთხეული:

კონსტრუქციული დილემა (CD)	კონიუნქციის დაშლა (CE)	კონიუნქციის შემოტანა (CI)	დისიუნქციის შემოტანა (DI)
$\begin{array}{c} X\to U \\ Y\to V \\ \underline{X\vee Y} \\ U\vee V \end{array}$	$\begin{array}{c} \underline{X\wedge Y} \\ X \end{array}$	$\begin{array}{c} X \\ \underline{Y} \\ X\wedge Y \end{array}$	$\begin{array}{c} \underline{X} \\ X\vee Y \end{array}$

ამ წესების შინაარსიც ინტუიტიურად გასაგები უნდა იყოს. მაგალითად, თუ უკვე „დავადგინეთ“ ორი ფორმულის ჭეშმარიტობა, მაშინ თამამად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მათი კონიუნქციაც ჭეშმარიტი იქნება (წესი CI), ხოლო თუ რაიმე ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ მისი ნებისმიერ სხვა ფორმულასთან დისიუნქციაც ჭეშმარიტი იქნება (წესი DI).

შევნიშნოთ, რომ კონიუნქციის დაშლის წესი CE საშუალებას გვაძლევს, უკვე მიღებული კონიუნქციიდან დავასკვნათ მისი პირველი კომპონენტი (ე.წ. პირველი კონიუნქტი). ბუნებრივად ჩნდება შეკითხვა – თუკი კონიუნქცია ჭეშმარიტია, მაშინ ხომ მისი მეორე კონიუნქტიც ჭეშმარიტი იქნება? რატომ არ გვაქვს წესი, რომელიც ამას ირეკლავს და საშუალებას გვაძლევს, რომ $X \wedge Y$ წანამძღვრიდან Y დანასკვი გამოვიტანოთ? სინამდვილეში შეიძლებოდა ასეთი წესიც გვქონოდა, მაგრამ ამის აუცილებლობა არ არის, რადგან მალე ვნახავთ, რომ გვაქვს წესი, რომლის საშუალებითაც $X \wedge Y$-იდან შეგვიძლია ჯერ $Y \wedge X$ დავასკვნათ, შემდეგ კი უკვე CE-ს გამოყენებით გამოვიყვანოთ Y. ასეთი გადანაცვლების წესი ოდნავ სხვა ბუნებისაა, ვიდრე აქამდე განხილული წესები და მის შემოტანამდე ჯერ ამ განსხვავებაზე ვისაუბროთ.

გამოყვანის ზემოთ მითითებული წესები **ცალმხრივია** (მხოლოდ „ზემოდან ქვემოთ“ მოქმედებს) და მონაწილე ფორმულების მხოლოდ **ძირითად** (ყველაზე „გარე“) მაკავშირებლებს იღებს მხედველობაში. მაგალითად, შემდეგი ჩანაწერები არალეგიტიმურია, არ წარმოადგენს მართებულ ფორმალურ დამტკიცებას:

1.	$(C \to B) \to D$	წ
2.	C	წ
3.	$B \to D$	MP:1,2

მართლაც, ადვილად დარწმუნდებით, რომ არსებობს საწინადადებო ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც 1. და 2. ჭეშმარიტი ხდება, ხოლო 3. კი მცდარია. ამ წესების „ფორმულის შიგნით“ გამოყენება დაშვებული არ არის.

ასევე, განვიხილოთ შემდეგი „გამოყვანა“:

1.	$A \vee C$	წ
2.	A	DI:1
3.	$A \wedge B$	CE:2

აქ დისიუნქციის შემოტანისა და კონიუნქციის შემოტანის წესები „უკუღმაა“ გამოყენებული (ქვემოდან ზემოთ) და შედეგიც არამართებული მსჯელობაა – $A \vee C$-დან არ გამომდინარეობს არც A და არც, მით უმეტეს, $A \wedge B$.

გამოყვანის წესების შემდეგი ჯგუფი ცოტა მეტი მოქნილობის საშუალებას გვაძლევს. ამ წესებში ორი **ტოლფასი** ფორმულაა მითითებული და უფლება გვაქვს, ნებისმიერი მათგანი ჩავანაცვლოთ მეორით (ანუ ეს წესები **ორმხრივია**), თანაც ამის გაკეთება „ფორმულის შიგნითაც“ დასაშვებია. ინტუიცია აქ ასეთია – ეს ფორმულები **ერთსა და იმავე** შინაარსს გამოხატავენ **სხვადასხვა ლოგიკური ფორმით**, ამიტომ ისინი ნებისმიერ კონტექსტში ურთიერთჩანაცვლებადია იმის მიხედვით, რომელი ფორმა უფრო ხელსაყრელია

დანასკვისკენ შემდეგი ნაბიჯის გადასადგმელად. ამ წესების ჩაწერის ფორმაც განსხვავებულია – ჩვენ მათ ორმაგი ხაზით გამოვსახავთ:

გადანაცვლების წესი (CL)	ჯუფთების წესი (AL)	განრიგების წესი (DL)
$\dfrac{X\vee Y}{Y\vee X}$ $\quad$ $\dfrac{X\wedge Y}{Y\wedge X}$	$\dfrac{(X\vee Y)\vee Z}{X\vee(Y\vee Z)}$ $\quad$ $\dfrac{(X\wedge Y)\wedge Z}{X\wedge(Y\wedge Z)}$	$\dfrac{X\vee(Y\wedge Z)}{(X\vee Y)\wedge(X\vee Z)}$ $\quad$ $\dfrac{X\wedge(Y\vee Z)}{(X\wedge Y)\vee(X\wedge Z)}$

ეს წესები კომპაქტურად არის ჩაწერილი, თუმცა თითოეული მათგანი სინამდვილეში ოთხი წესისგან შედგება. მაგალითად, ჯუფთების წესი მუშაობს კონიუნქციისათვისაც და დისიუნქციისათვისაც, თანაც თითოეულ შემთხვევაში „ზემოდან ქვემოთ“ და ასევე „ქვემოდან ზემოთ“. ეს წესები ძალიან ჰგავს შეკრებისა და გამრავლების ჩვეულ კანონებს (მაგ. „შესაკრებთა გადანაცვლებით ჯამი არ იცვლება“). თუმცა მივაქციოთ ყურადღება, რომ განრიგების წესი, სკოლის ალგებრის „განრიგებადობის კანონისგან“ განსხვავებით, სიმეტრიულია კონიუნქციისა და დისიუნქციის მიმართ.

ამ ელემენტარული წესების გამოყენებით შეიძლება უფრო რთული „ალგებრული მანიპულაციების“ მართებულობის დასაბუთება. მაგალითად, განვიხილოთ ფორმულა:

$$(A\vee B)\wedge(C\vee D)$$

სკოლის ალგებრის ინტუიცია გვკარნახობს, რომ ამ ფორმულაში „ფრჩხილების გახსნა“ უნდა შეიძლებოდეს. მართლაც, შეგვიძლია დავიწყოთ „მსჯელობა“ ამ ფორმულით, როგორც წანამძღვრით და მოცემული წესების გამოყენებით „გარდავქმნათ“ ის სხვა ფორმულად. დელოგას მსგავსი სისტემების ერთ-ერთი უპირატესობა ისიცაა, რომ არ არის აუცილებელი, წინასწარ ვიცოდეთ, ზუსტად რა „საბოლოო პოზიციისკენ“ გვინდა სვლა. მთავარია, მართებული, ლეგიტიმური ნაბიჯები გადავდგათ და „პარტია“ ჩვენს თვალწინ „გათამაშდება“:

1.	$(A\vee B)\wedge(C\vee D)$	წ
2.	$((A\vee B)\wedge C)\vee((A\vee B)\wedge D)$	DL:1
3.	$(C\wedge(A\vee B))\vee((A\vee B)\wedge D)$	CL:2
4.	$((C\wedge A)\vee(C\wedge B))\vee((A\vee B)\wedge D)$	DL:3
5.	$((C\wedge A)\vee(C\wedge B))\vee(D\wedge(A\vee B))$	CL:4
6.	$((C\wedge A)\vee(C\wedge B))\vee((D\wedge A)\vee(D\wedge B))$	DL:5
7.	$(C\wedge A)\vee((C\wedge B)\vee((D\wedge A)\vee(D\wedge B)))$	AL:6

ამ გამოყვანაში რამდენიმე ნაბიჯზე ღირს ყურადღების გამახვილება. შევნიშნოთ, რომ მე-3 ნაბიჯზე გადანაცვლების წესი CL გამოვიყენეთ არა მთლიანად ფორმულაზე, არამედ მის ნაწილზე $(A \vee B) \wedge C$ (ე.წ. ცალმხრივი წესების შემთხვევაში ეს შეცდომა იქნებოდა). ისიც შევნიშნოთ, რომ ამ გადანაცვლების გარეშე განრიგების წესს DL ვერ გამოვიყენებდით, რადგან ამ წესის წანამძღვარს ზუსტად $X \vee (Y \wedge Z)$ ფორმა უნდა ჰქონდეს, და არა $(Y \wedge Z) \vee X$ ფორმა. ასეთ სკრუპულოზურობას სინტაქსური გამოყვანის შემთხვევაში უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს. სწორედ ზედმიწევნითი სიზუსტე არის იმის გარანტი, რომ ფორმალურმა დამტკიცებამ თავისი ფუნქცია შეასრულოს. რა თქმა უნდა, ჩვეულებრივი მათემატიკური მსჯელობისას ხშირად „ვახტებით“ რამდენიმე ნაბიჯს, მაგრამ დამტკიცების *ფორმალიზებისას* მნიშვნელოვანია, რომ ყველა ნაბიჯი ზუსტად იყოს მითითებული. ამ ჭადრაკში რამდენიმე სვლის ზედიზედ, ერთ სვლაში შესრულება დაშვებული არ არის. წესის გამოყენება მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი და დასაშვები, თუ წესის წანამძღვრების ფორმა ზუსტად არის დაცული, გამონაკლისების გარეშე.

ორმხრივი წესების მარაგი ამით არ ამოიწურება. გვაქვს რამდენიმე წესი, სადაც სხვა მაკავშირებლებიც (უარყოფა, იმპლიკაცია) მონაწილეობს და ამ მაკავშირებლების კონიუნქციასა და დისიუნქციასთან ურთიერთქმედება არის გაწერილი. აი ეს წესები:

იმპლიკაციის წესი (LI)	გამეორების წესი (RL)		ორმაგი უარყოფა (DN)	დე მორგანის წესი (DM)	
$\dfrac{X \to Y}{\neg X \vee Y}$	$\dfrac{X \vee X}{X}$	$\dfrac{X \wedge X}{X}$	$\dfrac{\neg\neg X}{X}$	$\dfrac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y}$	$\dfrac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y}$

ამით წესების ჩამონათვალი არ ამოწურულა, მაგრამ სანამ დარჩენილ რამდენიმე წესზე გვექნება საუბარი, შევნიშნოთ, რომ წესების უკვე არსებული „მარაგი“ არც ისე ეკონომიურია. ზოგი წესი სხვა წესების საშუალებით „გამოიყვანება“ და პრინციპში, მათი ცალკე მითითება არც არის აუცილებელი. მართლაც, მოდით მოდუს ტოლენსის წესი გამოვიყვანოთ სხვა წესების მეშვეობით. კერძოდ, დავიწყოთ MT-ს წანამძღვრებით და თავად MT-ს გამოყენების გარეშე მივიღოთ მისი დანასკვი, ანუ ფორმალურად დავასაბუთოთ, რომ:

$$X \to Y, \neg Y \vdash \neg X$$

1.	$X \to Y$	წ
2.	$\neg Y$	წ
3.	$\neg X \vee Y$	LI:1
4.	$Y \vee \neg X$	CL:3
5.	$\neg X$	DS:4,2

მიუხედავად იმისა, რომ ეს წესი „ზედმეტი“ ჩანს, უბრალოდ მოსახერხებელია, რომ ეს წესი ცალკეც გვქონდეს, ვინაიდან ზოგჯერ მისი გამოყენებით ერთ ნაბიჯში მივიღებთ დანასკვს, ნაცვლად სამი ნაბიჯისა, რაც მის სხვა წესებით დასაბუთებას ჭირდება. ასეთი „შემოკლებები“ მათემატიკაში ხშირად გვხვდება. როდესაც რაიმე თეორემას ვამტკიცებთ, მის დასაბუთებაში უკვე დამტკიცებულ ლემას ან თეორემას ისე ვიყენებთ, რომ ამ გამოყენებული დებულების დამტკიცების გამეორება აღარ გვიწევს. სხვაგვარად ერთი მათემატიკური თეორემის დამტკიცების ჩამოყალიბება რამდენიმე ტომს მოითხოვდა. მათემატიკური ცოდნა ერთი დიდი ნაგებობაა, რომლის შემდეგი სართულის ოთახებიც წინა სართულს ეყრდნობა, ეს სართული თავის მხრივ მის წინა სართულზეა დაშენებული და ასე შემდეგ – საძირკველს კი ლოგიკა წარმოადგენს. ამ საძირკვლის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კომპონენტი სწორედ ჩვენი დებულებათა ლოგიკაა, რომლის დამტკიცების თეორიასაც ახლა ვეცნობით.

ამრიგად, წესების სიჭარბემ არ უნდა შეგვაშფოთოს. ეს უპირატესობაა, და არა ნაკლი. მართალია, კონკრეტულ შემთხვევაში შეიძლება ცოტა დაბნეულობა გამოიწვიოს იმან, წესების სიმრავლიდან რომლის გამოყენება აჯობებდა სასურველ შედეგამდე მისასვლელად, მაგრამ რაც მეტი გამოყვანის წესია ჩვენს ხელთ, მით უფრო მრავალფეროვანი და მძლავრია დამტკიცების წარმართვისთვის საჭირო არსენალი, რომელიც ჩვენს განკარგულებაშია. მოჭადრაკის მაღალი ოსტატობის ერთ-ერთი წინაპირობაა, რომ მან ბევრი სხვადასხვა სტანდარტული დებიუტის საწყისი სვლები იცოდეს.

არის კიდევ რამდენიმე ასეთი წესი, რომელთა ცალკე ჩამოყალიბების მკაცრი აუცილებლობა არ გვაქვს, რადგან ისინი უკვე შემოტანილი წესების მეშვეობითაც საბუთდება, მაგრამ ამ წესების შემოტანა მოსახერხებელია, რადგან ზოგჯერ ისინი არსებითად გვიმარტივებენ მსჯელობას და თანაც მსჯელობის საკმაოდ სტანდარტული და პრაქტიკაში ხშირად გამოყენებად ფორმებს წარმოადგენენ. აი ეს წესები:

დესტრუქციული დილემა (DD)	კონტრაპოზიციის წესი (LC)	გადატანის წესი (LE)
$\dfrac{X\to U \quad Y\to V \quad \neg U\vee\neg V}{\neg X\vee\neg Y}$	$\dfrac{X\to Y}{\neg Y\to\neg X}$ (ორმაგი ხაზი)	$\dfrac{X\to(Y\to Z)}{X\wedge Y\to Z}$ (ორმაგი ხაზი)

სავარჯიშო 3.2: დაამტკიცეთ სამივე ეს წესი დანარჩენი წესების გამოყენებით.

ჩვენი გამოყვანის წესების აღწერა თითქმის დასრულებულია. დაგვრჩა ერთადერთი, საკმაოდ მარტივი გამოყვანის წესი, რომელიც განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს თავისი უჩვეულო ფორმის გამო – ამ წესს წანამძღვარი საერთოდ არ გააჩნია! რას უნდა ამბობდეს გამოყვანის წესი, რომელსაც წანამძღვარი არ აქვს? როგორ უნდა დავასკვნათ რაიმე არაფრიდან? უწანამძღვრო გამოყვანის წესი ფაქტობრივად იგივეა, რაც **აქსიომა**, ანუ წინადადება, რომლის შემოტანაც დამტკიცებაში დასაბუთების გარეშე შეგვიძლია.

ზოგადად, აქსიომები[5] ფორმალურ ენაზე ჩაწერილი წინადადებებია, რომლებსაც ასეთებად (აქსიომებად) წინასწარი დათქმით ვაცხადებთ. ასეთი დათქმა შეიძლება იყოს, ან არ იყოს მოტივირებული რაიმე გარეშე მოსაზრებით, როგორიცაა ჭეშმარიტება, ან კონკრეტულ მათემატიკურ მოდელთან შესაბამისობა – ეს მეორეხარისხოვანია. მთავარია, ცალსახად იყოს დადგენილი, ზუსტად რომელი წინადადებები მიიჩნევა მოცემულ ფორმალურ სისტემაში აქსიომებად.

დებულებათა ლოგიკის შემთხვევაში ჩვენი წარმმართველი ინტუიცია სწორედ ჭეშმარიტობას უკავშირდებოდა. გამოყვანის წესების ჩამოყალიბებისას ვგულისხმობდით, რომ წესს ჭეშმარიტი დებულებებიდან ახალი ჭეშმარიტი დებულების დასკვნის საშუალება უნდა მოეცა. ამ ინტუიციის თანახმად, უწანამძღვრო გამოყვანის წესის დანასკვი ისეთი დებულება უნდა იყოს, რომელიც ყოველთვის, უპირობოდ ჭეშმარიტია. დებულებათა ლოგიკაში ასეთ დებულებებს ზოგადმართებულ დებულებებს, ან ტავტოლოგიებს უწოდებენ.

სწორედ ასეთია ერთი გამორჩეული ტავტოლოგია, რომელიც ორფასობის ფუნდამენტურ პრინციპს ასახავს და ჩვენი ბოლო წესის დანასკვად გვევლინება:

გამორიცხული
მესამის წესი (EM)

$$\frac{}{X \vee \neg X}$$

[5] **აქსიომა – ** ძველბერძნული სიტყვიდან **αξίωμα –** „ის, რაც ღირსად, შესაბამისად, შესაფერისად, ვარგისად თუ ჯეროვნად არის მიჩნეული თუ აღიარებული“. ამ სიტყვის ჩვეულებრივი მნიშვნელობა სასაუბრო ენაში გულისხმობს თავისთავად ცხად, უპირობოდ ჭეშმარიტ დებულებას, რომელიც დასაბუთებას არ საჭიროებს. ფორმალურ სისტემებში ამ სიტყვას უფრო ტექნიკური შინაარსი აქვს – აქსიომა უფრო ამოსავალი, საწყისი წინადადებაა, რომელიც თავად არ საჭიროებს დამტკიცებას არა აუცილებლად იმიტომ, რომ ის უპირობოდ ჭეშმარიტია, არამედ უბრალოდ დათქმის ძალით. პრინციპში აქსიომად *ნებისმიერი* ფორმალური წინადადება შეგვიძლია ავიღოთ. რა თქმა უნდა, ის ფორმალური სისტემები უფრო *გამოსადეგი* შეიძლება აღმოჩნდეს კონკრეტულ სინამდვილესთან მიმართებაში, რომელთა აქსიომებიც ამ სინამდვილეს ჭეშმარიტად აღწერს, ამიტომ ადამიანებს (მათემატიკოსებს) ხშირად სწორედ ასეთი ფორმალური სისტემები გვაინტერესებს, მაგრამ თავად ფორმალური სისტემისათვის ამას არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს.

ამ წესის გამოყენება ნიშნავს, რომ დამტკიცების ნებისმიერ ნაბიჯზე შეგვიძლია შემოვიტანოთ $X\vee\neg X$ სახის ნებისმიერი ფორმულა. ამ წესის არსებობა ასევე გვაძლევს საშუალებას, რომ ყოველგვარი წანამძღვრის გარეშე დავიწყოთ ფორმალური მსჯელობა და ამ მსჯელობის თითოეულ ნაბიჯზე მიღებული ფორმულა ტავტოლოგია, ანუ ზოგადმართებული დებულება იქნება, რომელიც ცვლადების ყველა შესაძლო მნიშვნელობისათვის ჭეშმარიტია. ასეთ ფორმულებს სხვაგვარად დებულებათა ლოგიკის თეორემებსაც უწოდებენ. მათ უმნიშვნელოვანესი, ფუნდამენტური ადგილი უჭირავთ ლოგიკასა და მათემატიკაში.

ჩანაწერი $\vdash X$ ნიშნავს, რომ X ფორმულა დამტკიცებადია (გამოყვანადია) წანამძღვრების გარეშე, ანუ X ტავტოლოგიაა. მაგალითად, გამორიცხული მესამის წესის თანახმად $\vdash X\vee\neg X$.

თვალსაჩინოებისთვის, გამოვიყვანოთ ერთი მარტივი ტავტოლოგია:

$$\vdash A\to A\vee B$$

1.	$A\vee\neg A$	EM
2.	$(A\vee\neg A)\vee B$	DI:1
3.	$(\neg A\vee A)\vee B$	CL:2
4.	$\neg A\vee(A\vee B)$	AL:3
5.	$A\to A\vee B$	LI:4

ჩვეულებრივ, დებულებათა ლოგიკის გამოყვანის სისტემის ჩამოყალიბებისას კიდევ რამდენიმე დამხმარე საშუალება შემოაქვთ, როგორებიცაა ირიბი დამტკიცების სქემა და დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით. ასეთ დროს უწანამძღვრო გამოყვანის წესების (აქსიომების) შემოტანა აუცილებელი აღარ არის და ეს დამხმარე სქემები საგრძნობლად ამარტივებს კიდეც გამოყვანის პროცესს. ვინაიდან ამ სქემების აღწერა და მათი საშუალებით აგებული დამტკიცებების ჩაწერა დამატებით სირთულეებს შეიცავს, გადავწყვიტეთ დელოგაში ეს სქემები არ შეგვეტანა და მათ ნაცვლად გამორიცხული მესამის აქსიომატური წესი შემოვიტანეთ.

ამით დელოგას, როგორც გამოყვანის ფორმალური სისტემის აღწერა დასრულებულია, თუმცა სანამ სავარჯიშოებს შემოგთავაზებთ, გვინდა – დასკვნის სახით – დელოგას მაგალითზე გაშინაარსებული დამტკიცების კონკრეტული ცნების საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ ფორმალური დამტკიცების ზოგადი მახასიათებლები და ამით ნაწილობრივ ვუპასუხოთ მოცემული საკონკურსო თემის ცენტრალურ შეკითხვას – რა არის დამტკიცება?

თუკი დაფიქსირებულია **ფორმალური ენა** $\mathcal{F}$ (ანუ ანბანი და ფორმალური გრამატიკა), ამ ენაზე ჩაწერილი **აქსიომების** გარკვეული ერთობლიობა $\mathcal{A}$ და ამავე ენაზე ჩაწერილი

გამოყვანის წესების გარკვეული ერთობლიობა $\mathcal{L}$, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია **ფორმალური დამტკიცების სისტემა**, ან უბრალოდ **ფორმალური სისტემა**.

სწორედ მოცემული ფორმალური სისტემის ფარგლებში ეძლევა მკაფიო და დასრულებული აზრი **ფორმალური დამტკიცების** ცნებას.

ამრიგად, ფორმალური დამტკიცება არ არის აბსოლუტური ცნება – ის დამოკიდებულია ფორმალური ენის რაგვარობაზე და გამოყვანის აპარატის (აქსიომებისა და წესების ერთობლიობის) რომელობაზე. წინადადებების კონკრეტული მიმდევრობა, რომელიც ერთ ფორმალურ სისტემაში სავსებით მართებულ დამტკიცებას წარმოადგენს, სხვა ფორმალურ სისტემაში შეიძლება სულაც არ იყოს მართებული დამტკიცება.

ამ ტერმინოლოგიისა და რამდენიმე მოსახერხებელი აღნიშვნის საშუალებით შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ **ფორმალური დამტკიცების** ცნების მკაფიო განსაზღვრება:

დავუშვათ მოცემულია ფორმალური სისტემა L და ამ სისტემის ფორმალურ ენაზე ჩაწერილი წინადადებები $A_1, A_2, \dots, A_n$ და B. ვიტყვით, რომ **ამ სისტემის ფარგლებში** $A_1, A_2, \dots, A_n$ წანამძღვრებიდან გამომდინარეობს B დანასკვი, თუკი არსებობს იმავე ფორმალური ენის წინადადებების ისეთი სასრული მიმდევრობა $D_1, D_2, \dots, D_m$, რომლის თითოეული D_k წევრისთვის სრულდება შემდეგი სამი პირობიდან ერთ-ერთი მაინც:

1. D_k არის L სისტემის ერთ-ერთი აქსიომა;
2. D_k ემთხვევა ერთ-ერთ წანამძღვარს (ანუ გვხვდება ჩამონათვალში $A_1, A_2, \dots, A_n$);
3. D_k არის L სისტემის ერთ-ერთი ისეთი გამოყვანის წესის დანასკვი, რომლის თითოეული წანამძღვარიც გვხვდება ჩამონათვალში $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$.

ხოლო ამ $D_1, D_2, \dots, D_m$ მიმდევრობის ბოლო D_m წევრი კი ემთხვევა B-ს.

ასეთ შემთხვევაში $D_1, D_2, \dots, D_m$ მიმდევრობას ვუწოდებთ ამ გამომდინარეობის **დამტკიცებას.**

შემოკლებისთვის, იმ ფაქტს, რომ რაიმე **დამტკიცებადია (გამოყვანადია)** მოცემულ სისტემაში, აღვნიშნავთ სპეციალური სიმბოლოთი $\vdash_L$, რომლის მარცხნივაც იწერება დაშვებები, ხოლო მარჯვნივ – დანასკვი.

შესაბამისად, ჩანაწერი $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_L B$ ნიშნავს, რომ „L ფორმალური სისტემის ფარგლებში $A_1, A_2, \dots, A_n$ წანამძღვრებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს B" ან სხვაგვარად: „$A_1, A_2, \dots, A_n$-იდან ***L*-გამოიყვანება** B". როდესაც L ფორმალური სისტემის რაგვარობა კონტექსტიდან ცხადია, ხშირად უბრალოდ ამბობენ „დამტკიცებადია", „გამომდინარეობს" ან „გამოიყვანება"და იყენებენ $\vdash$ სიმბოლოს.

ფორმალურ სისტემაში შეიძლება ზოგი წინადადება მტკიცდებოდეს წანამძღვრების გარეშე, მხოლოდ აქსიომებზე და გამოყვანის წესებზე დაყრდნობით. ასეთ წინადადებებს **თეორემებს** უწოდებენ (მაგ. ამ ფორმით: „B წინადადება L სისტემის თეორემაა“, ან „B არის L-თეორემა“) და ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ: $\vdash_L B$.

მაშასადამე, B **თეორემის დამტკიცება** არის ფორმალურად ჩაწერილი წინადადებების ისეთი სასრული მიმდევრობა, რომელიც ბოლოვდება B წინადადებით და რომლის თითოეული წევრიც ან აქსიომაა, ან მიღებულია წინა წევრებიდან რომელიმე გამოყვანის წესის საშუალებით.

სავარჯიშოები:

დაამტკიცეთ დელოგას გამოყვანის წესებით ქვემოთ მოცემული გამომდინარეობები (დელოგას 15 გამოყვანის წესი შემდეგ გვერდზეა ერთად მოცემული)

3.3. $\neg(A\to B) \vdash A\wedge\neg B$

3.4. $A\wedge\neg B \vdash \neg(A\to B)$

3.5. $(\neg A\to B)\wedge(\neg A\vee C\to D),\ \neg A \vdash B\wedge D$

3.6. $A\vee B\to C,\ D\vee E\to\neg C,\ E \vdash \neg B$

3.7. $(A\to B)\wedge(A\to C),\ B\wedge C\to D\wedge E,\ \neg D \vdash \neg A$

3.8. $\vdash \neg(A\to B) \to A\wedge\neg B$

3.9. $\vdash B\wedge C \to \neg A\vee C$

3.10. $\vdash A\to(\neg D\wedge B \to A)$

3.11. $\vdash (A\to B)\vee(B\to A)$

ცალმხრივი წესები

MP
$$\begin{array}{l} X\to Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

MT
$$\begin{array}{l} X\to Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

HS
$$\begin{array}{l} X\to Y \\ Y\to Z \\ \hline X\to Z \end{array}$$

DS
$$\begin{array}{l} X\lor Y \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}$$

CI
$$\begin{array}{l} X \\ Y \\ \hline X\land Y \end{array}$$

CD
$$\begin{array}{l} X\to U \\ Y\to V \\ X\lor Y \\ \hline U\lor V \end{array}$$

CE
$$\begin{array}{l} X\land Y \\ \hline X \end{array}$$

DI
$$\begin{array}{l} X \\ \hline X\lor Y \end{array}$$

DD
$$\begin{array}{l} X\to U \\ Y\to V \\ \neg U\lor \neg V \\ \hline \neg X\lor \neg Y \end{array}$$

ორმხრივი წესები

LI
$$\begin{array}{c} X\to Y \\ \hline\hline \neg X\lor Y \end{array}$$

LC
$$\begin{array}{c} X\to Y \\ \hline\hline \neg Y\to \neg X \end{array}$$

LE
$$\begin{array}{c} X\to (Y\to Z) \\ \hline\hline X\land Y\to Z \end{array}$$

RL
$$\begin{array}{c} X\lor X \\ \hline\hline X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X\land X \\ \hline\hline X \end{array}$$

CL
$$\begin{array}{c} X\lor Y \\ \hline\hline Y\lor X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X\land Y \\ \hline\hline Y\land X \end{array}$$

DN
$$\begin{array}{c} \neg\neg X \\ \hline\hline X \end{array}$$

DM
$$\begin{array}{c} \neg(X\lor Y) \\ \hline\hline \neg X\land \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(X\land Y) \\ \hline\hline \neg X\lor \neg Y \end{array}$$

AL
$$\begin{array}{c} (X\lor Y)\lor Z \\ \hline\hline X\lor (Y\lor Z) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (X\land Y)\land Z \\ \hline\hline X\land (Y\land Z) \end{array}$$

DL
$$\begin{array}{c} X\lor (Y\land Z) \\ \hline\hline (X\lor Y)\land (X\lor Z) \end{array} \qquad \begin{array}{c} X\land (Y\lor Z) \\ \hline\hline (X\land Y)\lor (X\land Z) \end{array}$$

აქსიომა

EM
$$\begin{array}{c} \\ \hline X\lor \neg X \end{array}$$