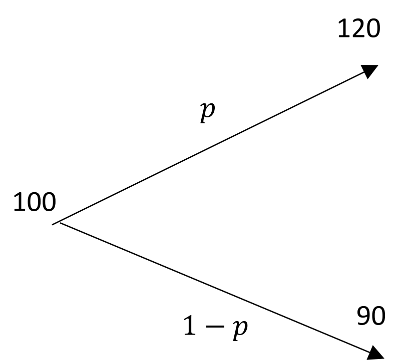
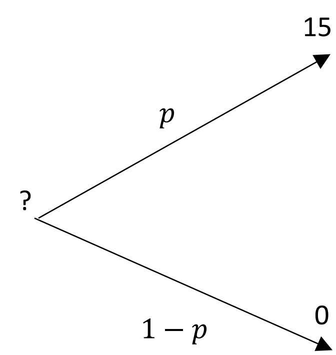
ოფციონების ფასდადების პრინციპები მრავალნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით

ამ ნაწილში ჩვენ გავეცნობით ოფციონების ფასდადების პრინციპებს მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეების მოდელის მიხედვით და აღვწერთ იმ რეკურსიულ პროცედურებს, რომელთა გამოყენებითაც ხდება ოფციონების ფასების გამოთვლა. თუმცა მანამდე, შევეცდებით რულეტის თამაშის (roulette ინგლ., рулетка რუს.) დახმარებით თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ ეს პრინციპები ისევ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით, კონკრეტული რიცხვითი მაგალითის გამოყენებით.

მაგალითი. განვიხილოთ ევროპული ყიდვის ოფციონი (call option) აქციაზე, რომლის შეთანხმების ფასი K ტოლია 105 დოლარის. ვთქვათ აქციის ფასი საწყის $t = 0$ მომენტში არის S=100 დოლარი, T მომენტამდე მისი ფასი არ იცვლება, ხოლო $t = T$ მომენტში მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა $S_u = \$120$ და $S_d = \$90$. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ საპროცენტო განაკვეთი $r = 0$, ანუ დროის საწყის მომენტში შეგვიძლია თანხის შენახვაც და სესხებაც, თუმცა როგორც დადებულ თანხას, ისე აღებულ ვალს არაფერი არ ერიცხება.





ნახაზი 1

შეგახსენებთ, რომ ყიდვის ოფციონი აძლევს მის მფლობელს (მყიდველს) უფლებას იყიდოს აქცია (ან რაიმე სხვა აქტივი) მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრულ ფასად. ოფციონის გამყიდველი ვალდებულია შეასრულოს

კონტრაქტის პირობები, თუ მისი მფლობელი თავისი უფლების განხორციელებას მოისურვებს.

კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ დროს, როდესაც ოფციონის მფლობელს შეუძლია თავისი უფლების გამოყენება, უწოდებენ ოფციონის აღსრულების დროს და წინასწარ განსაზღვრულ ფასს კი – შეთანხმების ფასს.

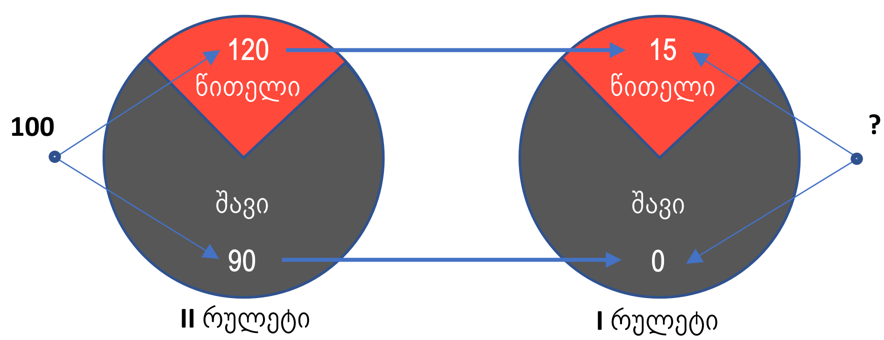
ყიდვის ოფციონის ტერმინალური მოგება (გასამრჯელო) არის

$$\max(S_T - K, 0),$$

რომელიც ჩვენ შემთხვევაში შემდეგი სახით წარმოდგება

$$\max(S_T - K, 0) = \max(S_T - 105, 0) = \begin{cases} 15\,, & \text{თუ } S_T = 120, \\ 0\,, & \text{თუ } S_T = 90. \end{cases}$$

რულეტის თამაშთან შედარება. წარმოვიდგინოთ ორი რულეტი, რომელთაგან ერთი ასახავს ოფციონის მფლობელის ტერმინალურ მოგებას, ხოლო მეორე - აქციის ფასის ცვლილებას.



ნახაზი 2

ვთქვათ ჯერ გვაქვს მხოლოდ ერთი, პირველი რულეტი და გვთავაზობენ შემდეგ თამაშს: თუ რულეტის დატრიალების შემდეგ გამოჩნდა წითელი ფერი, მივიღებთ 15 დოლარს, ხოლო შავი ფერის გამოჩენის შემთხვევაში არ მოგვცემენ არაფერს. ცხადია, თამაშში მონაწილეობის მისაღებად მოგვთხოვენ წინასწარ გარკვეული თანხის დადებას. რა თანხის გადახდას დავთანხმდებოდით ამ პირობებში?

ბუნებრივია, ჯერ ვიკითხოთ რისი ტოლია წითელი (ან შავი) ფერის გამოჩენის ალბათობა (რისთვისაც საკმარისია ვიცოდეთ წითელი და შავი სექტორების ფართობების ან შესაბამისი რკალების სიგრძეების შეფარდება). ვთქვათ წითელი ფერის გამოჩენის ალბათობა ცნობილია და ის p -ს ტოლია. ჩვენ ალბათ არ დავთანხმდებოდით $15p$ სიდიდეზე (ანუ საშუალო მოგებაზე) მეტი თანხის გადახდას, რადგან დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად ასეთი თამაშების სერიაში შესაძლებელია დიდი დანაკარგი განვიცადოთ. მაგრამ ახლა ჩვენ სხვა რამეზე გვინდა გავამახვილოთ ყურადღება:

როგორიც არ უნდა იყოს წითელი ფერის გამოჩენის ალბათობა (რა თქმა უნდა თუ $0 < p < 1$) და მაქსიმალურ მოგებაზე (ანუ 15 დოლარზე) ნაკლები რა თანხაც არ უნდა დავდოთ წინასწარ ასეთ თამაშში მონაწილეობის მისაღებად, თამაშში მონაწილე ვერც ერთი მხარე ვერ მოახერხებს ურისკო მოგების მიღებას. ასეთი თამაშის ნებისმიერ სასრულ სერიაში იარსებებს როგორც მოგების, ისე წაგების დადებითი ალბათობა.

ოფციონის ფასდადების შემთხვევაში გვაქვს განსხვავებული ვითარება, რადგან შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეორე რულეტიც, რომელიც აქციის ფასის ცვლილებას ასახავს. ამასთან ამ რულეტის შესაბამისი წითელი სექტორის სიდიდე პირველი რულეტის წითელი სექტორის სიდიდეს (ანუ აქციის ფასის ზრდის ალბათობა პირველი რულეტიდან მოგების ალბათობას) ემთხვევა. უფრო მეტიც, მეორე რულეტის შედეგი სავსებით განსაზღვრავს პირველი რულეტის შედეგს (თუ მეორე რულეტის დატრიალების შემდეგ გამოჩნდა წითელი ფერი, იგივე ფერი გამოჩნდება პირველზეც). გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, თუ რამდენი უნდა გადავიხადოთ წინასწარ მეორე რულეტის შესაბამის თამაშში მონაწილეობის მისაღებად. ჩვენ წინასწარ ვიხდით 100 დოლარს და რულეტის დატრიალების შემდეგ ვიღებთ 120 ან 90 დოლარს შესაბამისად წითელი და შავი ფერის გამოჩენის მიხედვით. შეგვიძლია აგრეთვე 100 დოლარის ნაცვლად წინასწარ დავდოთ ნებისმიერი წილი და მოგება მივიღოთ ამ წილის პროპორციულად. მაგალითად, თუ 100 დოლარის ნაცვლად დავდებთ მის ერთ მეხუთედს, მაშინ რულეტის დატრიალების შემდეგ მივიღებთ შესაბამისად 24 ან 18 დოლარს.

დავსვათ შემდეგი კითხვა: იმიტომ ხომ არ ღირს მეორე რულეტზე თამაში $100, რომ ამ თამაშში საშუალო მოგება 100 დოლარის ტოლია? ალათობის თეორიაში მიღებული თალსაზრისით სამართლიანი იქნებოდა რულეტის თამაშში მონაწილეობის ფასად ჩაგვეთვალა ამ თამაშიდან მისაღები მოგების საშუალო მნიშვნელობა (მოგების მათემატიკური ლოდინი). თუ ეს ვარაუდი სწორია, მაშინ ამ რულეტზე წითელი ფერის გამოჩენის π ალბათობა უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$120\,\pi + (1-\pi)90 = 100,$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია $\pi = \frac{1}{3}$.

თუ მეორე რულეტზე წითელი ფერის გამოჩენა 1/3 ალბათობით არის ნაგულისხმები, მაშინ იგივე ალბათობა უნდა ჰქონდეს წითელი ფერის გამოჩენას პირველ რულეტზეც. თუ ამ ალბათობის მიხედვით ვიანგარიშებთ პირველ რულეტზე საშუალო მოგებას მივიღებთ $15 \times \frac{1}{3} + 0 \times 2/3 = 5$ დოლარის ტოლ თანხას, რაც უნდა ღირდეს ამ (რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომის) პრინციპის მიხედვით გამოთვლილი პირველ რულეტზე თამაშის უფლება (ოფციონის ფასი).

წინა ნაწილში ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ რისკ-ნეიტრალურ ფასდადების პრინციპის მიხედვით განსაზღვრული ოფციონის ფასი დროის საწყის მომენტში მოპასუხე პორტფელის (ჰეჯის) მნიშვნელობას უტოლდება და ერთადერთი ფასია, რომელიც არბიტრაჟის (ურისკო მოგების) შესაძლებლობას გამორიცხავს.

ჩვენ შევეცდებით ეს ვაჩვენოთ განხილული მაგალითისთვის რულეტების ენაზე. ანუ ვაჩვენოთ, რომ 5 დოლარისგან განსხვავებული ნებისმიერი ფასით პირველ რულეტზე თამაშის უფლების მოპოვების შემთხვევაში იარსებებს ურისკო მოგების შესაძლებლობა.

ვთქვათ პირველ რულეტზე თამაშის უფლების მინიჭებისთვის გადაგვიხადეს 5 დოლარზე მეტი თანხა $5 + \partial, \partial > 0$. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიქნებით ოფციონის გამყიდველის როლში და გარანტირებულად მომგებიანი პორტფელის შესადგენად შეგვიძლია ვისარგებლოთ წინა ნაწილში აღწერილი ჰეჯირების პრინციპით. კერძოდ კი, მოპასუხე პორტფელის (ჰეჯის) საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \alpha + 120\beta = 15\,, \\ \alpha + 90\beta = 0\,, \end{cases}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია $\alpha = -45, \beta = 1/2$ წყვილი.

ასეთი პორტფელის შედგენა შესაძლებელია 5 დოლარის ტოლი საწყისი კაპიტალით, რადგან $-45 + \frac{1}{2} \times 100 = 5$.

ამიტომ ვირჩევთ შემდეგ სტრატეგიას: ვსესხულობთ 45 დოლარს, ვუმატებთ მას უკვე მიღებულ 5 დოლარს და 5+45=50 დოლარის დადებით მონაწილეობას ვიღებთ მეორე რულეტის გათამაშებაში ½ -ის ტოლი წილით (შეესაბამება ნახევარი აქციის ყიდვას). თუ ამ რულეტზე გამოჩნდა წითელი ფერი, მაშინ წითელი ფერი გამოჩნდება პირველ რულეტზეც. ამ შემთხვევაში მეორე რულეტიდან მივიღებთ 60 დოლარს და ამ თანხით გადავიხდით 15 დოლარის ტოლ წაგებას მეორე რულეტიდან და დარჩენილი თანხით სრულად დავფარავთ 45 დოლარის ვალს. თუ მეორე

რულეტზე გამოჩნდება შავი ფერი, მაშინ იგივე ფერი გამოჩნდება პირველ რულეტზე და მის გათამაშებაში არაფერი არ გვექნება გადასახდელი. ვიღებთ 45=90/2 დოლარს მეორე რულეტიდან და სრულად ვისტუმრებთ აღებულ ვალს. ყველა შემთხვევაში დაგვრჩება ∂ -ს ტოლი ურისკო მოგება.

პირიქით, ვთქვათ შევიძინეთ პირველი რულეტის თამაშში მონაწილეობის უფლება (ვიყიდეთ ოფციონი) $5-\partial, \partial>0$, ფასად.

აქ უკვე ვართ ოფციონის მყიდველის როლში და ურისკო მოგების მისაღებად შეგვიძლია ავირჩიოთ წინა შემთხვევის საწინააღმდეგო $(45, -\frac{1}{2})$ სტრატეგია (45 დოლარის შენახვა და ნახევარი აქციის სესხება). რულეტის ენაზე ეს ნიშნავს პარტნიორის პოვნას, რომელიც მონაწილეობას მიიღებს მეორე რულეტის გათამაშებაში ½ წილით (რაშიც ის გადაიხდის საფასურს 100/2=50 დოლარს) და დარჩენილი $50-5+\partial$ თანხიდან 45 დოლარის შენახვას.

თუ მეორე რულეტზე გამოჩნდა წითელი ფერი, მაშინ წითელი ფერი გამოჩნდება პირველ რულეტზეც. ამ შემთხვევაში მეორე რულეტიდან გადასახდელი იქნება 60 დოლარი, რასაც მოვახერხებთ შენახული 45 დოლარით და 15 დოლარის ტოლი მოგებით, რომელიც პირველი რულეტიდან გველოდება. თუ მეორე რულეტზე გამოჩნდება შავი ფერი, მაშინ აქედან გადასახდელი გვექნება მხოლოდ 45=90/2 დოლარი, რომელსაც შენახული თანხიდან დავფარავთ და ისევ დაგვრჩება ∂ -ს ტოლი ურისკო მოგება.

ოფციონის ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურის აღწერა.

გადავიდეთ ზოგადი ბინომური ხეების მოდელის განხილვაზე. ეს მოდელი შემოთავაზებული იყო კოქსის, როსის და რუბინშტეინის მიერ 1976 წელს და ის დღემდე პოპულარულია რამდენიმე მიზეზის გამო. ეს არის უმარტივესი მოდელი, რომლის მიხედვით ადვილად ითვლება ოფციონების ფასები და მასში კარგად ჩანს ყველა ის პრინციპი და თვალსაზრისი, რომელიც ოფციონების ფასების განსაზღვრას საფუძვლად ედება. მიუხედავად იმისა, რომ აქციის ფასის ევოლუციის ბინომური მოდელი არ ასახავს რეალობას, ამ მოდელით შესაძლებელია ცნობილი ბლეკ-შოულსის მოდელის აპროქსიმირება სადაც აქციის ფასის ცვალებადობა გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობით აღიწერება. გარდა ამისა, ბინომურ ხეებზე დამყარებული რიცხვითი მეთოდებით ხდება ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასების მიახლოებითი გამოთვლა, რაც განსაკუთრებით

მნიშვნელოვანია ამერიკული ტიპის ოფციონებისთვის, რომელთათვისაც ფასების გამოსათვლელი ცხადი გამოსახულებების მიღება ხშირად ვერ ხერხდება.

ამ მოდელის მიხედვით აქციის ფასის ცვლილება ხდება მხოლოდ დროის დისკრეტულ $0, 1, 2, \dots, T$ მომენტებში, დროის ნულოვანი მომენტიდან ოფციონის აღსრულების T მომენტამდე. თუ აქციის მიმდინარე ფასს t მომენტში აღვნიშნავთ S_t - თი, მაშინ ამ მოდელის მიხედვით აქციის ფასი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობით

$$\mathrm{S}_{t+1} = \mathrm{S}_t\, \rho_{t+1}, \qquad \mathrm{S}_0 = S, \tag{1}$$

სადაც $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t, \dots$ დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა. ამასთან ρ_t -ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა u და d, შესაბამისად p და $1 - p$ ალბათობით, სადაც

$$0 < \mathrm{d} < \mathrm{u}, \quad \mathrm{u} > 1$$

და p ალბათობის შესახებ მხოლოდ ცნობილია, რომ

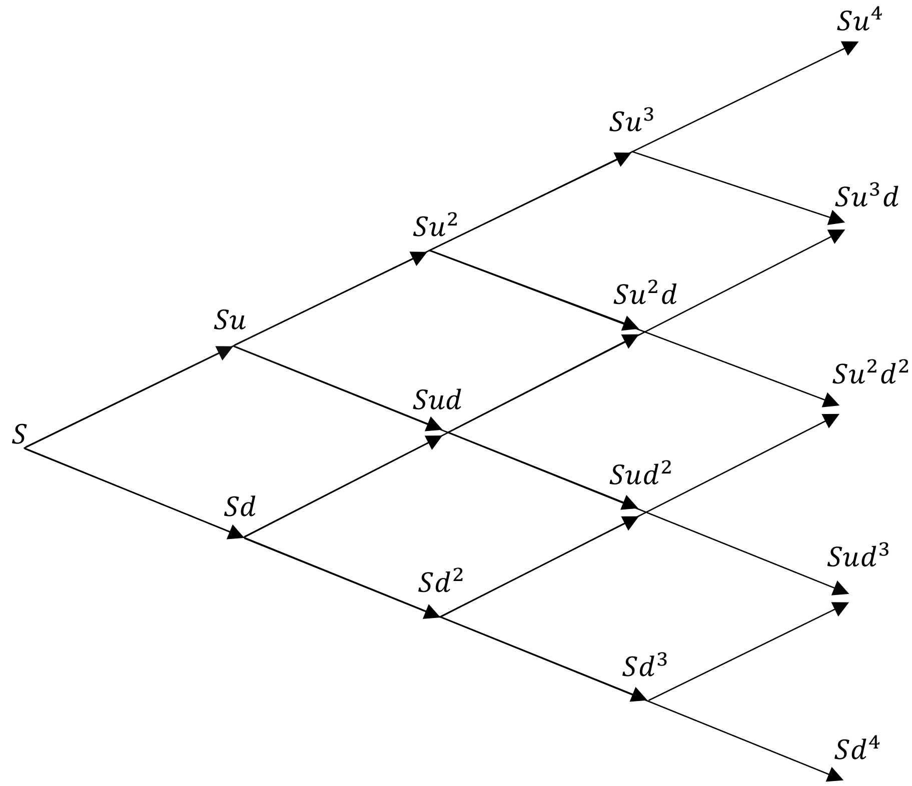
$$0 < p < 1.$$

აღვნიშნოთ $r -$ ით საპროცენტო განაკვეთი და დაუშვათ, რომ რაიმე თანხის საბანკო ანგარიშზე ინვესტირებისას დროის ყოველი ერთეულოვანი პერიოდის შემდეგ ამ თანხას ემატება მისი r პროცენტი. მაგალითად, S თანხის საბანკო ანგარიშზე დადებისას $t = 1$ მომენტში ვიღებთ $S(1 + r)$ თანხას, რომელსაც $t = 2$ მომენტში ემატება წინა მომენტში მიღებული თანხის r პროცენტი და $t = 2$ მომენტში ვიღებთ

$$S(1 + r) + S(1 + r)r = S(1 + r)^2,$$

ხოლო T მომენტში პროცენტის T-ჯერ დარიცხვის შემდეგ -- $S(1 + r)^T$ სიდიდის ტოლ თანხას.

ქვემოთ ნახაზზე გამოსახულია აქციის ფასის ევოლუციის შესაბამისი ბინომური ხე, რომლის ყოველ კვანძში მითითებულია აქციის შესაბამისი ფასი და ბინომური ხის ყოველი შტო შეესაბამება აქციის ფასის რომელიმე შესაძლო ტრაექტორიას.



ნახაზი 3

დროის $t = 0$ მომენტში აქციის ფასი ცნობილია და S -ის ტოლია.

დროის $t = 1$ მომენტში აქციის ფასს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა Su და Sd, სადაც $0 < d < u$, $u > 1$.

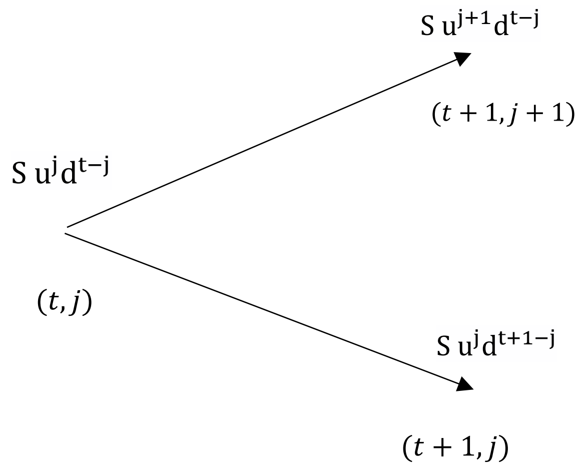
.

დროის $t = 2$ მომენტში აქციის ფასის შესაძლო მნიშვნელობებია Su^2, Sud და $S d^2$ და ა. შ. ,

დროის მიმდინარე t მომენტში აქციის ფასი იღებს $t + 1$ შესაძლო მნიშვნელობას

$$S\,u^j d^{t-j}\quad,\quad j = 0, 1, 2, \dots, t.$$

ხის კვანძი დროის მიმდინარე t მომენტში, როდესაც აქციის ფასი იღებს $S\,u^j d^{t-j}$ მნიშვნელობას აღვნიშნოთ (t, j) წყვილით. ყოველი (t, j) კვანძი გადადის მის მარჯვნივ მეზობელ $(t + 1, j + 1)$ და $(t + 1, j)$ კვანძებში.



ნახაზი 4

განხილულ ფინანსურ ბაზარზე, რომელიც ერთი აქციისა და საბანკო ანგარიშისგან შედგება, არბიტრაჟის (ურისკო მოგების) თავიდან აცილების მიზნით უნდა დაუშვათ, რომ სრულდება უტოლობები

$$0 < \mathrm{d} < 1 + r < \mathrm{u}. \qquad (2)$$

ეს პირობა, როგორც უკვე ვნახეთ პირველ ნაწილში, აგრეთვე უზრუნველყოფს ერთადერთი რისკ-ნეიტრალური ალბათობის არსებობას ერთნაბიჯიან ბინომურ მოდელში.

შევნიშნოთ, რომ რისკ-ნეიტრალური ალბათობები ყველა კვანძში ერთი და იგივეა და ერთნაბიჯიანი მოდელის მსგავსად გამოითვლება, რადგან ყოველ კვანძში აქციის მიმდინარე ფასი ყოველ შემდეგ ნაბიჯზე ისევ u ან d სიდიდეებზე მრავლდება.

თუ (t, j) კვანძში აქციის ფასს აღვნიშნავთ $\mathrm{S}_t(j)$ -თი, მაშინ მის მარჯვნივ მეზობელ $(\mathrm{t}+1, j+1)$ და $(\mathrm{t}+1, j)$ კვანძებში აქციის ფასი შესაბამისად იქნება $u\mathrm{S}_t(j)$ და $d\mathrm{S}_t(j)$ სიდიდეების ტოლი. ამიტომ ამ კვანძის შესაბამისი რისკ-ნეიტრალური ალბათობა უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$\pi u\mathrm{S}_t(j) + (1-\pi)\, d\mathrm{S}_t(j) = (1+r)\mathrm{S}_t(j),$$

სადაც განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს თანხას, რომელიც მიიღება $S_t(j)$ -ის ტოლი თანხის საბანკო ანგარიშზე ერთი პერიოდით (r საპროცენტო განაკვეთით)

ინვესტირებისას. თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $S_t(j)$ -ზე, მივიღებთ მის ტოლფას

$$\pi u + (1 - \pi)d = 1 + r \tag{3}$$

განტოლებას, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული კვანძის მდებარეობაზე. ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი

$$\pi = \frac{1+r-d}{u-d} \tag{4}$$

გვაძლევს რისკ-ნეიტრალურ ალბათობას, რადგან (2) პირობის ძალით $0 < \pi < 1$.

თუ ცნობილია ოფციონის მიმდინარე ფასები $(t+1, j+1)$ და $(t+1, j)$ კვანძებში, მაშინ შესაძლებელია ოფციონის ფასის გამოთვლა (t, j) კვანძში პირველ ნაწილში განხილული ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით მიღებული ფორმულების გამოყენებით, რაც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ოფციონის ფასი რეკურენტულად, თუ დავიწყებთ ბოლო კვანძიდან და ვიმოძრავებთ საწყისი კვანძის მიმართულებით. ოფციონის ფასის გამოთვლის ეს რეკურენტული პროცედურა მსგავსია წილის გაყოფის ამოცანის ბლეზ პასკალის მეთოდით ამოხსნის, რომელიც M-ვექტორის 2020 წლის მასალებშიც (ალბათობის შესავალი) არის მოყვანილი.

აღვწეროთ ოფციონის ფასის გამოთვლის პროცედურა.

ოფციონის ფასი ცნობილია დროის ბოლო T მომენტში და ის ოფციონის ტერმინალურ მოგებას (გასამრჯელოს) უტოლდება. მაგალითად (T, j) კვანძში მისი მნიშვნელობა $f(S\, u^j d^{T-j})$ სიდიდის ტოლია, ხოლო ყიდვის ოფციონისთვის მისი მნიშვნელობაა $\max(S\, u^j d^{T-j} - K, 0)$.

დროის ბოლოსწინა $T - 1$ მომენტის ყოველ კვანძში ოფციონის ფასი გამოითვლება ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით, როგორც T მომენტში საშუალო დისკონტირებული მოგება, სადაც დისკონტირება ხდება r საპროცენტო განაკვეთით ერთეულოვანი პერიოდისთვის და საშუალო მოგება ანგარიშდება რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომის მიხედვით.

ამის მსგავსად, დროის $T - 2$ მომენტის ყოველ კვანძში ოფციონის ფასი გამოითვლება როგორც წინა კვანძებში უკვე გამოთვლილი ფასების საშუალო დისკონტირებული მნიშვნელობა და ა. შ, თუ ასე გავაგრძელეთ მოძრაობა ბოლო კვანძებიდან უკან საწყის კვანძამდე, მივიღებთ ოფციონის ფასს დროის ნულოვან მომენტშიც.

ოფციონის ფასის გამოთვლა ორნაბიჯიან ბინომურ მოდელში.

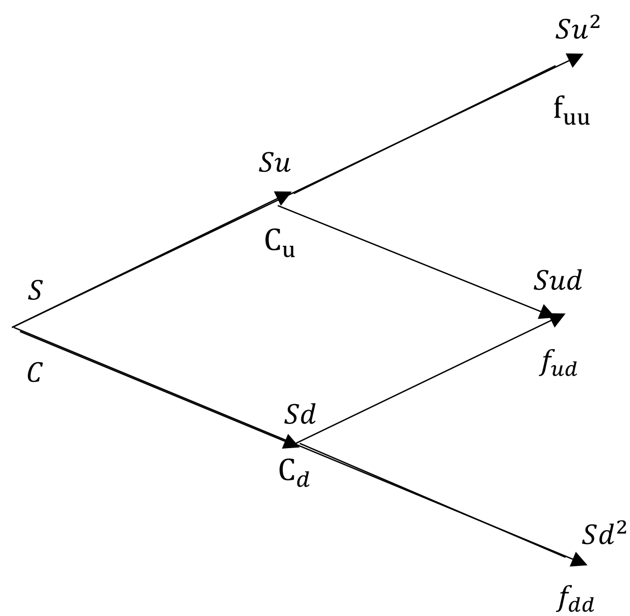
საილუსტრაციოდ ჯერ განვიხილოთ ორპერიოდიანი ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციაა $f(x)$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები.

f_{uu}, f_{ud} და f_{dd}-თი აღვნიშნოთ ოფციონის აღსრულების $T = 2$ მომენტში მისაღები გასამრჯელო (ტერმინალური მოგება), როდესაც აქციის ფასი ამ მომენტში შესაბამისად იღებს მნიშვნელობებს

$\mathrm{Su}^2, \mathrm{Sud}$ და Sd^2 -ს, ანუ

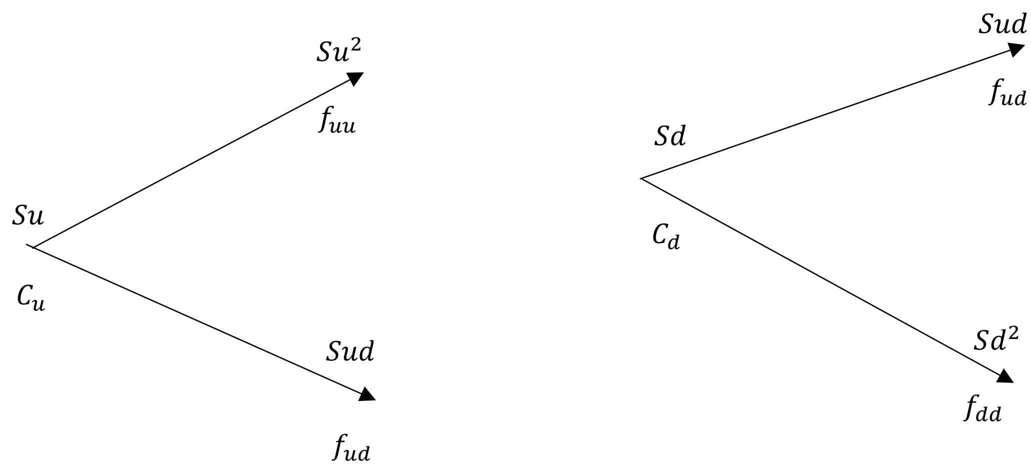
$\mathrm{f_{uu}} = \mathrm{f}(\mathrm{Su}^2)$, $\mathrm{f_{ud}} = \mathrm{f}(\mathrm{Sud})$ და $\mathrm{f_{dd}} = \mathrm{f}(\mathrm{Sd}^2)$.

$\mathrm{C_u}$ - თი (შესაბამისად C_d - თი) აღვნიშნოთ ოფციონის მიმდინარე ფასი $T = 1$ მომენტში, როდესაც $\mathrm{S}_1 = Su$ -ს (შესაბამისად, როცა $\mathrm{S}_1 = Sd$ -ს).



ნახაზი 5

ამ ოფციონის ფასის გამოთვლის ალგორითმი ორი ეტაპისგან შედგება. პირველ ეტაპზე გამოითვლება ოფციონის მიმდინარე C_u და C_d ფასები ბოლოსწინა მომენტის ორივე კვანძში. ცალკე გამოვყოთ ერთნაბიჯიანი ხეები, რომლებიც ამ კვანძებიდან იღებს სათავეს. ეს ხეები ქვემოთ მოცემულ ნახაზზეა წარმოდგენილი.



ნახაზი 6

ოფციონის მიმდინარე C_u და C_d ფასების დასადგენად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელისთვის წინა ნაწილში მიღებული შედეგები. რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპის მიხედვით

$$C_u = \frac{1}{1+r}\,[\pi f_{uu} + (1-\pi)\, f_{ud}], \tag{5}$$

$$C_d = \frac{1}{1+r}[\pi\, f_{ud} + (1-\pi) f_{dd}], \tag{6}$$

სადაც რისკ-ნეიტრალური π ალბათობა მოიცემა (4) ფორმულით.

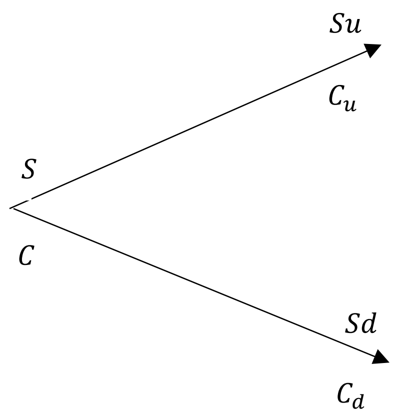
ბოლო ორი გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს ერთიანი ფორმით

$$C_1 = \frac{1}{1+r}[\pi f(S_1 u) + (1-\pi) f(S_1 d)] \tag{7}$$

შემთხვევითი სიდიდის სახით, რომელიც C_u -ს ტოლია, როდესაც $S_1 = Su$ და ემთხვევა C_d -ს, თუ $S_1 = Sd$ -ს.

მეორე (და ამ შემთხვევაში ბოლო) ეტაპზე გამოითვლება ერთპერიოდიანი ოფციონის ფასი, რომლის გასამრჯელო $T = 1$ მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასია, რომელიც

წინა ეტაპზეა გამოთვლილი. ეს ტოლფასია შემდეგი ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის განხილვის.



ნახაზი 7

რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპის თანახმად

$$C = \frac{1}{1+r}[\pi C_u + (1-\pi)C_d] \ , \tag{8}$$

სადაც რისკ-ნეიტრალური ალბათობა π გამოითვლება (4) ფორმულით.

თუ ამ უკანასკნელ ფორმულაში ჩავსვამთ წინა ეტაპზე გამოთვლილ C_u და C_d ფასების მნიშვნელობებს (5) და (6) ტოლობებიდან, მივიღებთ ოფციონის ფასის შემდეგ გამოსახულებას

$$C = \frac{1}{(1+r)^2}[\pi^2 f_{uu} + 2\pi(1-\pi)f_{ud} + (1-\pi)^2 f_{dd}]. \tag{9}$$

ვაჩვენოთ, რომ (9) ტოლობა თანხვედრაშია ოფციონების ფასდადების რისკ-ნეიტრალურ პრინციპთან და ამ ტოლობის მიხედვით ოფციონის ფასი არის მისი საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი „რისკ-ნეიტრალური" ალბათური ზომის მიმართ.

აქციის ფასი $T = 2$ მომენტში იღებს Su^2, Sud და Sd^2 მნიშვნელობებს. ამასთან Sud მნიშვნელობა აქციის ფასმა შეიძლება მიიღოს ორი გზით: პირველ ნაბიჯზე ფასის ზრდით და შემდეგ კლებით და პირიქით, ჯერ შემცირებით და შემდეგ ზრდით (აქციის ფასის d -ზე გამრავლებას კლებას პირობითად ვუწოდებთ, რადგან $d < 1$ პირობა არ არის მოთხოვნილი). ამიტომ, (1) მოდელში განსაზღვრული ρ_1, ρ_2 შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობის გამო აქციის ფასი $T = 2$ მომენტში Su^2, Sud და Sd^2

მნიშვნელობებს მიიიღებს შესაბამისად p^2, $2p(1-p)$ და $(1-p)^2$ ალბათობით. მაშინ „რისკ-ნეიტრალურ სამყაროში“ აქციის ფასის ევოლუციის იგივე მოდელისთვის აქციის ფასმა $\mathrm{Su}^2, \mathrm{Sud}$ და Sd^2 მნიშვნელობები უნდა მიიღოს შესაბამისად π^2, $2\pi(1-\pi)$ და $(1-\pi)^2$ ალბათობით. ამ ალბათობებით გამოთვლილი აქციის ფასის მოსალოდნელი მნიშვნელობა $T=2$ მომენტში ტოლი იქნება საბანკო ანგარიშზე აქციის საწყისი ფასის ტოლი S თანხის ინვესტირებით $T=2$ მომენტში მისაღები თანხის, რაც (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რადგან

$\mathrm{Su}^2\pi^2 + 2\pi(1-\pi)\mathrm{Sud} + \mathrm{Sd}^2\,(1-\pi)^2 = S(\,\pi u + (1-\pi)\,d\,)^2 = S(1+r)^2$.

აქ იგულისხმება S თანხაზე პროცენტის ორჯერ დარიცხვა ($T=1$ და $T=2$ მომენტებში) r საპროცენტო განაკვეთით, როდესაც S თანხის საბანკო ანგარიშზე დადებისას $T=2$ მომენტში ვიღებთ $S(1+r)^2$ სიდიდის ტოლ თანხას.

თუ E^{π} -თი აღვნიშნავთ მათემატიკურ ლოდინს რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიმართ, მაშინ როგორც ვნახეთ

$$E^{\pi}S_2 = \mathrm{Su}^2\pi^2 + 2\pi(1-\pi)\mathrm{Sud} + \mathrm{Sd}^2\,(1-\pi)^2 = S(1+r)^2$$

და (9) ტოლობა შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს

$$C = \frac{1}{(1+r)^2}\;E^{\pi}f(S_2)\,,$$

რაც ნიშნავს, რომ ოფციონის ფასი არის მისი საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი „რისკ-ნეიტრალური“ ალბათური ზომის მიხედვით.

დავამტკიცოთ, რომ ასეთნაირად გამოთვლილი ოფციონის ფასი ერთადერთი არაარბიტრაჟული ფასია და ნებისმიერ სხვა ფასად ამ ოფციონის ყიდვით ან გაყიდვით იარსებებს ურისკო მოგების შესაძლებლობა.

შევადგინოთ მოპასუხე პორტფელი $(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_1,\beta_1)$, რომლის შესაბამისი კაპიტალი ზუსტად გაიმეორებს ოფციონის გასამრჯელოს $T=2$ მომენტში.

ჯერ, დროის საწყის მომენტში, ვიპოვოთ (α_0,β_0) სტრატეგია, რომლის შესაბამისი კაპიტალი $T=1$ მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასს, C_1 –ს დაემთხვევა და ვაჩვენოთ, რომ ამ სტრატეგიის ღირებულება (8) ფორმულით განსაზღვრულ ოფციონის ფასის ტოლია

$$\alpha_0 + \beta_0\mathrm{S} = \mathrm{C}. \tag{10}$$

(α_0,β_0) სტრატეგიის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta S u = C_u\,, \\ \alpha(1+r) + \beta S d = C_d\,, \end{cases} \tag{11}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია

$$\alpha_0 = \frac{1}{1+r}[\,C_u - \beta_0 S u], \qquad \beta_0 = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}\,. \tag{12}$$

(10) ტოლობა გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი გარდაქმნებიდან

$$\alpha_0 + \beta_0 S = \beta_0 S + \frac{1}{1+r}[\,C_u - \beta_0 S u] =$$

$$= \frac{1}{1+r}[\,C_u - \beta_0 S(1+r-u)] =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[\,C_u - \frac{(C_u - C_d)(1+r-u)}{u-d}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[\,C_u \frac{1+r-d}{u-d} + C_d \frac{u-1-r)}{u-d}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+r}[\,\pi C_u + (1-\pi) C_d] = C,$$

სადაც გამოვიყენეთ ჯერ (12), ხოლო ბოლოს - (4) და (8) ტოლობები.

ამრიგად, $C = \alpha_0 + \beta_0 S$-ს ტოლი საწყისი კაპიტალით ავირჩიეთ სტრატეგია (α_0, β_0) რომლის შესაბამისი კაპიტალი $T = 1$ მომენტში, აქციის ფასის გამოცხადების შემდეგ, გახდება $\alpha_0(1+r) + \beta_0 S_1 = C_1$-ის ტოლი.

ამის შემდეგ, $T = 1$ მომენტში, ვირჩევთ ახალ (α_1, β_1) პორტფელს ამ მომენტში არსებული $\alpha_0(1+r) + \beta_0 S_1$ თანხიდან, ანუ უნდა შესრულდეს შემდეგი თვითდაფინანსების პირობა

$$C_1 = \alpha_0(1+r) + \beta_0 S_1 = \alpha_1 + \beta_1 S_1, \tag{13}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ არც ფულის ხარჯვა და არც დამატებითი სახსრების მოზიდვა არ არის დაშვებული. ახალი (α_1, β_1) პორტფელის შექმნა შეგვიძლია მხოლოდ საწყისი (α_0, β_0) პორტფელიდან მიღებული თანხით.

(α_1, β_1) პორტფელის არჩევის შემდეგ მისი შესაბამისი კაპიტალი დროის $T = 2$ მომენტში, აქციის ფასის გამოცხადების შემდეგ, გახდება $\alpha_1(1+r) + \beta_1 S_2$ სიდიდის ტოლი და α_1 , β_1 ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\alpha_1(1+r) + \beta_1 S_2 = f(S_2),$$

რაც შემდეგი განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta S_1 u = f(S_1 u)\,, \\ \alpha(1+r) + \beta S_1 d = f(S_1 d)\,, \end{cases} \tag{14}$$

ამოხსნის ტოლფასია. ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნია

$$\alpha_1 = \frac{1}{1+r}[f(S_1 u) - \beta_1 S_1 u], \qquad \beta_1 = \frac{f(S_1 u) - f(S_1 d)}{S_1(u-d)}\ . \tag{15}$$

(10) ტოლობის მსგავსად, ადვილი საჩვენებელია, რომ (15) ტოლობით განსაზღვრული (α_1, β_1) პორტფელის ფასი $T = 1$ მომენტში $\alpha_1 + \beta_1 S_1$ ტოლია C_1 -ის და სრულდება თვითდაფინანსების (13) პირობა.

ამრიგად (9) ფორმულით განსაზღვრული C -ს ტოლი საწყისი კაპიტალით, შესაძლებელია ისეთი პორტფელის შედგენა, რომლის შესაბამისი კაპიტალი ოფციონის აღსრულების $T = 2$ მომენტში ოფციონის გასამრჯელოს გაუტოლდება.

თუ ოფციონის გამომშვები გაყიდის ოფციონს $\overline{C} > C$ ფასად, მაშინ ის ურისკოდ მიიღებს $\overline{C} - C$ სხვაობის ტოლ მოგებას, რადგან მიღებული თანხის C ნაწილით ის შექმნის (α_0, β_0), (α_1, β_1) მოპასუხე პორტფელს (ისე, როგორც ზევით არის აღწერილი) და სრულად გაისტუმრებს ოფციონის მყიდველს ოფციონის აღსრულების მომენტში. მსგავსი მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ $\overline{C} < C$ შემთხვევაშიც, რა დროსაც ურისკო მოგება შეუძლია მიიღოს უკვე ოფციონის მყიდველმა, თუ გამოიყენებს წინა შემთხვევის საპირისპირო სტრატეგიას.

მაგალითი. გავიხილოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე სამთვიანი ბიჯით და ექვსთვიანი ევროპული ყიდვის ოფციონი (Call Option). ვთქვათ

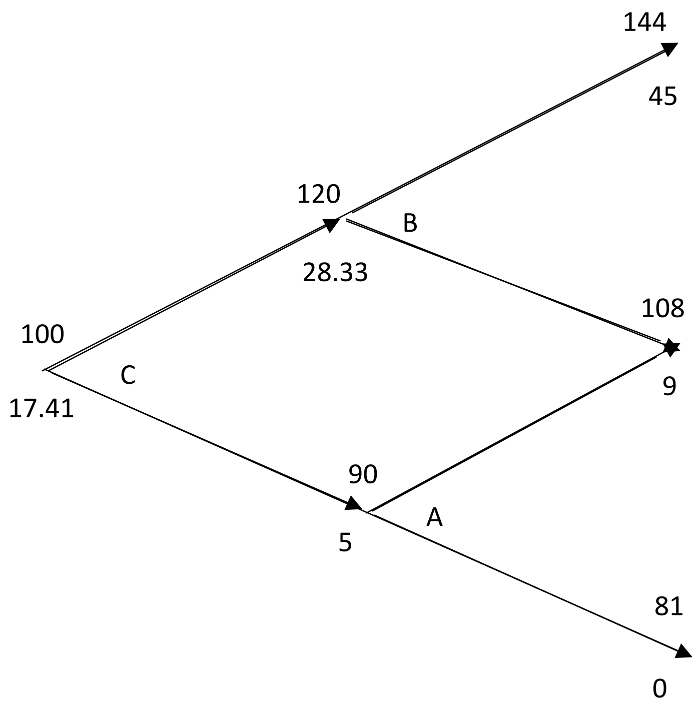
$$S = \$100, \qquad u = 1.2\,, \qquad d = 0.9, \qquad K = \$99, \qquad r = 0.08.$$

გამოვთვალოთ ამ ოფციონის ფასი. სამი თვის შემდეგ აქციის ფასმა შეიძლება მიიღოს ორი მნიშვნელობა $Su = \$120$ ან $Sd = \$90$, ხოლო ექვსი თვის შემდეგ სამი -- $Sd^2 = \$81,\ Su^2 = 144,\ Sud = 108$. ამ ოფციონის ტერმინალური მოგება (გასამრჯელო) არის $\max(S_T - 99, 0)$ სიდიდის ტოლი. ამიტომ ამ შემთხვევაში

$f_{uu} = 45, \quad f_{ud} = 9, \quad f_{dd} = 0$

და ეს მნიშვნელობები ცხადია ოფციონის აღსრულების $T = 2$ მომენტში შესაბამის კვანძებში ოფციონის ფასის იდენტურია.

ამ ოფციონის შესაბამისი ბინომური ხე ქვემოთ მოცემულ ნახაზზეა გამოსახული, სადაც ყოველი კვანძის ზემოთ აქციის, ხოლო ქვემოთ ოფციონის შესაბამისი ფასებია მითითებული.



ნახაზი 8

ამ მაგალითში რისკ-ნეიტრალური ალბათობა ტოლია $\pi = 0.6$, რადგან 0.6

$120\pi + 90(1 - \pi) = 100(1 + 0.08)$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნია.

დავთვალოთ ჯერ ოფციონის მიმდინარე ფასი კონტრაქტის დადებიდან სამი თვის შემდეგ, ანუ $T = 1$ მომენტის B და A კვანძებში, აქციის 120 და 90-ის ტოლი კურსის შესაბამისად.

B კვანძში ოფციონის ფასი (ანუ ამ მომენტისთვის რისკ-ნეიტრალური ალბათობით გამოთვლილი მოსალოდნელი მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, იმ პირობით, რომ აქციის კურსი გახდა 120 დოლარი) იქნება

$$\mathrm{C_u} = \frac{9 \times 0.4 + 45 \times 0.6}{1 + 0.08} = \frac{30.6}{1.08} = 28\frac{1}{3} \approx 28.33$$

C კვანძში ოფციონის ფასი იქნება

$$\mathrm{C_d} = \frac{9 \times 0.6 + 0 \times 0.4}{1 + 0.08} = 5.$$

ოფციონის ფასი საწყის მომენტში კი ტოლია

$$\mathrm{C} = \frac{28\frac{1}{3} \times 0.6 + 5 \times 0.6}{1 + 0.08} = \frac{18.8}{1.08} \approx 17.41$$

ევროპული ოფციონის ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურის აღწერა მრავალნაბიჯიან ბინომურ მოდელში

გავაგრძელოთ მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეების გამოყენებით ევროპული ოფციონის ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურის აღწერა.

ოფციონის აღსრულების მომენტში ოფციონის ფასი მისი გასამრჯელოს (ტერმინალური მოგების) ტოლია

$$\mathrm{C}_T = f(\mathrm{S}_\mathrm{T})$$

და ყოველ (T, j) კვანძში მისი მნიშვნელობაა

$$\mathrm{C}_{T,j} = f(S\mathrm{u}^\mathrm{j}\mathrm{d}^{T-\mathrm{j}}), \quad \mathrm{j} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}.$$

პირველ ეტაპზე გამოითვლება ოფციონის ფასი C_{T-1} ბოლოსწინა $(T-1, j)$ კვანძებში. ამ მიზნით განიხილება ამ კვანძებიდან გამოსული თითოეული ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე და გამოიყენება ოფციონის რისკ-ნეიტრალური ალბათობის მიხედვით გამოთვლილი ფასები

$$\mathrm{C}_{\mathrm{T}-1,j} = \frac{1}{1+r}\ [\pi\mathrm{C}_{\mathrm{T},j+1} + (1-\pi)\ \mathrm{C}_{\mathrm{T},j}], \ \mathrm{j} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}-1,$$

სადაც რისკ-ნეიტრალური ალბათობა π გამოითვლება (4) ფორმულის მიხედვით.

ასე გამოთვლილი ერთნაბიჯიანი ოფციონების $\mathrm{C}_{T-1,j}$ ფასები მიეწერება შესაბამის $(T-1, j)$ კვანძებს აქციის ფასების ქვეშ.

ამის შემდეგ განიხილება ოფციონი სიცოცხლის ხანგრძლივობით $T-1$, რომლის ტერმინალური მოგება წინა ეტაპზე გამოთვლილი ოფციონის ფასის, C_{T-1} -ის, ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ ახლა ბინომური ხის ფინალურ მნიშვნელობად ვთვლით $(T-1, j)$ კვანძებში მიწერილ მნიშვნელობებს, $\mathrm{C}_{T-1,j}$, $j = 0,1, \dots, T-1$. შემდეგ ისევ, როგორც წინა ეტაპზე, ვითვლით ოფციონის ფასს ყველა $(T-2, j)$ კვანძში, ამ კვანძებიდან გამომავალი ერთნაბიჯიანი ბინომური ხეების და რისკ-ნეიტრალური პრინციპის გამოყენებით, რის შედეგადაც ვიღებთ, რომ

$$\mathrm{C}_{\mathrm{T}-2,j} = \frac{1}{1+r}\ [\pi\mathrm{C}_{\mathrm{T}-1,j+1} + (1-\pi)\ \mathrm{C}_{\mathrm{T}-1,j}], \ \mathrm{j} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}-2.$$

ყოველ $(T-2, j)$ კვანძს მიეწერება ოფციონის ფასის სათანადო მნიშვნელობა $\mathrm{C}_{T-2,j}$ და ა. შ., ვაგრძელებთ ამ პროცედურას, სანამ არ მიიღწევა ბინომური ხის საწყისი კვანძი. ამ უკანასკნელ კვანძში გამოთვლილი ოფციონის ფასი $\mathrm{C}_{0,0} = C$ მოგვცემს სწორედ ოფციონის საწყის ფასს, რომელიც ტოლია

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}_{0,0} = \frac{1}{1+r}\ [\pi \mathrm{C}_{1,1} + (1-\pi)\ \mathrm{C}_{1,0}].$$

ზოგადად, ოფციონის ფასის გამოსათვლელი რეკურენტული განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{\mathrm{T}-k,j} = \dfrac{1}{1+r}\ [\pi \mathrm{C}_{\mathrm{T}-k+1,j+1} + (1-\pi)\ \mathrm{C}_{\mathrm{T}-\mathrm{k}+1,j}], \qquad \mathrm{j} = 0,1,2,\dots,\mathrm{T}-k \\ \text{სასაზღვრო პირობით } T - \text{მომენტში},\ \ \mathrm{C}_{T,j} = f\left(S\mathrm{u}^{\mathrm{j}}\mathrm{d}^{T-\mathrm{j}}\right), \quad \mathrm{j} = 0,1,2,\dots,\mathrm{T}, \end{cases}$$

სადაც რისკ-ნეიტრალური ალბათობა π გამოითვლება (4) ფორმულით.

ისევე, როგორც ორნაბიჯიანი ბინომური მოდელის შემთხვევაში, C -ს ტოლი საწყისი კაპიტალით შესაძლებელია მოპასუხე პორტფელის შექმნა და იმის ჩვენება, რომ ოფციონის ასეთნაირად გამოთვლილი ფასი ერთადერთი ფასია, რომელიც გამორიცხავს ურისკო მოგების შესაძლებლობას. ჩვენ აქ მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ აქციათა წილი $(T-k, j)$ კვანძში, რომელიც საჭიროა მოპასუხე პორტფელის შესადგენად, შემდეგი სახით წარმოდგება

$$\beta_{T-k,j} = \frac{\mathrm{C}_{T-k+1,j+1} - \mathrm{C}_{T-k+1,j}}{S\mathrm{u}^{\mathrm{j}}\mathrm{d}^{T-k-\mathrm{j}}(u-d)}\ .$$

სავარჯიშოები

1) ვთქვათ აქციის ფასი საწყის $t=0$ მომენტში არის S=100 დოლარი, T მომენტამდე მის ფასი არ იცვლება, ხოლო $t=T$ მომენტში მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა $S_u = \$115$ და $S_d = \$90$. ერთხელ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r = 0.05$-ის ტოლია. განვიხილოთ ყიდვის ოფციონი ამ აქციაზე. როგორი უნდა იყოს ამ კონტრაქტის შეთანხმების ფასი, თუ ცნობილია, რომ ოფციონის ფასი 6 დოლარის ტოლია?

2) განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელი, სადაც აქციის ფასი საწყის მომენტში არის S=100 დოლარი, ხოლო T მომენტში მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა $S_u = \$120$ და $S_d = \$90$. ერთხელ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი 8% -ის ტოლია ($r = 0.08$). აღვნიშნოთ S_T- თი აქციის ფასი T მომენტში. იპოვეთ ფინანსური ვალდებულების ფასი, რომლის გასამრჯელოა $\left(\frac{S_T}{S}\right)^2$.

3) განვიხილოთ ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონები აქციაზე, რომლის ფასი საწყის მომენტში S -ის ტოლია. ვთქვათ საწყის მომენტში საბანკო ანგარიშზე დადებულ თანხას სარგებელი r საპროცენტო განაკვეთით მხოლოდ ერთხელ ერიცხება ოფციონების აღსრულების T მომენტში. რისი ტოლი უნდა იყოს კონტრაქტის შეთანხმების ფასი, რომ ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ფასები ერთანეთს დაემთხვეს?

4) ვთქვათ აქციის ფასი დროის ნულოვან მომენტში 45 დოლარია. ამავე მომენტში ერთთვიანი გაყიდვის ოფციონი ამ აქციაზე, რომლის შეთანხმების ფასი 50 დოლარის ტოლია, ღირს 3 დოლარი. ერთხელ თვის ბოლოს მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი 2% -ის ტოლია ($r = 0.02$). რა შესაძლებლობა არსებობს არბიტრაჟის, ანუ როგორ შეიძლება მივიღოთ ურისკო მოგება?

5) ვთქვათ საბანკო ანგარიშზე შეტანილ თანხას ყოველი თვის ბოლოს ერიცხება არსებული თანხის 5%. რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში, რომ ორი თვის ბოლოს მივიღოთ 11025 ლარი?

6) გიორგის სურს დეპოზიტზე შეიტანოს 1000 ლარი ორი წლით. მან არჩევანი უნდა გააკეთოს ორ - A და B ბანკს შორის. A ბანკში საპროცენტო განაკვეთი 20%-ა, პროცენტის ყოველწლიური დარიცხვით, მაგრამ არსებობს დეფოლტის (მთელი თანხის დაკარგვის) რისკი, რომელიც 1/5 ალბათობის ტოლია. B ბანკში წლიური საპროცენტო განაკვეთი 10%-ა , ხოლო დეფოლტის ალბათობა არის მხოლოდ 1/121. რომელ ბანკშია ორი წლის შემდეგ მისაღები თანხის საშუალო მნიშვნელობა უფრო მეტი და რამდენით?

7) ვთქვათ აქციის ფასი დროის ნულოვან მომენტში 100 დოლარია და ყოველი თვის შემდეგ, ოთხი თვის განმავლობაში, მისი ფასი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობით

$$\mathrm{S}_t = \mathrm{S}_{t-1}\,\rho_t, \quad \mathrm{S}_0 = 100, \quad t = 1,2,3,4,$$

სადაც ρ_1, ρ_2, ρ_3 და ρ_4 დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და S_t -თი t მომენტში აქციის ფასია აღნიშნული. ამასთან ρ_t -ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა $\mathrm{u} = \frac{4}{3}$ და $\mathrm{d} = \frac{3}{4}$ ალბათობით $\frac{1}{2}$. რისი ტოლია ალბათობა, რომ აქციის ფასი ოთხი თვის შემდეგ ისევ მიიღებს 100 დოლარის ტოლ მნიშვნელობას, ანუ რისი ტოლია ალბათობა $P(S_4 = 100)$?

8) გავიხილოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე ექვსთვიანი ბიჯით. ვთქვათ აქციის საწყისი ფასია $S = \$100$ და ყოველ შემდეგ ექვსთვიან პერიოდში მისი ფასი ან 10 პროცენტით იზრდება, ან იმავე პროცენტით მცირდება. საბანკო ანგარიშზე სარგებლის დარიცხვა ხდება ყოველ ექვს თვეში ერთხელ 8% -ის ტოლი საპროცენტო განაკვეთით ($r = 0.08$). რისი ტოლია ერთწლიანი ევროპული ყიდვის ოფციონის ფასი, რომლის შეთანხმების ფასია $K = \$100$?

9) წინა მაგალითში განხილულ შემთხვევაში გამოვთვალოთ გაყიდვის ოფციონის ფასი, რომლის შეთანხმების ფასი ისევ 100 დოლარია. მიღებული შედეგები შეამოწმეთ ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულის გამოყენებით, რომელიც ამ შემთხვევაში, სარგებლის ორჯერადი დარიცხვის გათვალისწინებით, შემდეგ სახეს მიიღებს

$$P + S = C + \frac{K}{(r+1)^2},$$

სადაც P - თი ყიდვის, ხოლო C -თი გაყიდვის ოფციონის ფასია აღნიშნული.

10) ვთქვათ აქციის ფასი დროის ნულოვან მომენტში 100 დოლარია და ყოველი თვის შემდეგ, სამი თვის განმავლობაში, მისი ფასი ან 10 პროცენტით იზრდება, ან 10 პროცენტით მცირდება. დაუშვათ, რომ საპროცენტო განაკვეთი ნულის ტოლია, ანუ როგორც საბანკო ანგარიშზე დადებულ თანხას, ისე ბანკიდან აღებულ ვალს არაფერი არ ერიცხება. რისი ტოლია სამთვიანი ევროპული ყიდვის ოფციონის ფასი, რომლის შეთანხმების ფასია $K = \$100$?