ოფციონების ფასდადების პრინციპები ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მაგალითზე

ჩვენ განვიხილავთ წარმოებულ ფინანსურ ინსტრუმენტებს, როგორებიცაა ოფციონური და ფიუჩერსული კონტრაქტები, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ფინანსური რისკების მართვაში. ცნობილია, რომ ოფციონები საკმაოდ რისკიანი ფინანსური ინსტრუმენტებია. მათ აქვთ მოგების დიდი პოტენციალი, რომელსაც ასევე თან ახლავს დიდი დანაკარგების საშიშროება. თუმცა, მათ შეუძლიათ სადაზღვევო ფუნქციების შესრულებაც და მათი სხვადასხვა კომბინაცია გამოიყენება ფასების დრამატული ცვლილებებით გამოწვეული რისკისგან დასაცავად. გარდა ამისა, ოფციონების საშუალებით შესაძლებელია ისეთი სტრატეგიის არჩევა, რომელიც ყოველი კონკრეტული ინვესტორის ფინანსურ ბაზარზე წარმოდგენებს და მათ რისკისადმი მიდრეკილებებს შეესაბამება, რაც სხვა ფინანსური ინსტრუმენტებით ვერ ხერხდება.

ოფციონი არის ფასიანი ქაღალდი (შეთანხმება, კონტრაქტი) ორ პარტნიორს შორის, რომლის თანახმად ოფციონის მყიდველი იძენს უფლებას იყიდოს ან გაყიდოს გარკვეული აქტივი (აქცია, ობლიგაცია, უცხო ქვეყნის ვალუტა, საქონელი ან რაიმე სხვა ფასეულობა) მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრულ ფასად. ოფციონის გამყიდველი (მისი გამომშვები) ვალდებულია შეასრულოს კონტრაქტის პირობები, თუ მისი მყიდველი (მფლობელი) თავისი უფლების განხორციელებას გადაწყვეტს.

განასხვავებენ ოფციონების ორ ძირითად ტიპს – ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონებს.

ყიდვის ოფციონი (call option) აძლევს მის მფლობელს (მყიდველს) უფლებას იყიდოს აქცია (ან რაიმე სხვა აქტივი) მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრულ ფასად.

გაყიდვის ოფციონი (put option) ანიჭებს მის მფლობელს უფლებას გაყიდოს აქცია (ან რაიმე სხვა აქტივი) მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრულ ფასად.

კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ დროს (დღეს ან თარიღს), როდესაც ოფციონის მფლობელს შეუძლია თავისი უფლების გამოყენება, უწოდებენ **ოფციონის აღსრულების დროს** და წინასწარ განსაზღვრულ ფასს კი – **შეთანხმების ფასს**.

შესადარებლად მოვიყვანთ ფიუჩერსული კონტრაქტის განსაზღვრასაც. **ფიუჩერსული კონტრაქტი** არის შეთანხმება ორ მხარეს შორის, რომლის მიხედვითაც ერთი (აქციის ან

რაიმე აქტივის მყიდველი) *ვალდებულია* იყიდოს, ხოლო მეორე (აქტივის გამყიდველი) – *ვალდებულია* გაყიდოს ესა თუ ის აქტივი მომავალში განსაზღვრულ დროს, წინასწარ განსაზღვრულ ფასად. ასეთი კონტრაქტის დადებისას ორივე მხარის რისკი შეიცვლება განსაზღვრულობით, რადგან აქტივის მყიდველი დაზღვეულია აქტივის ფასის ზრდისგან, ხოლო აქტივის გამყიდველი – აქტივის ფასის ვარდნისგან. როგორც ვხედავთ, ოფციონებისგან განსხვავებით, ფიუჩერსული კონტრაქტის დროს შეთანხმებაში მონაწილე ორივე მხარეს აქვს საბაზისო აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის როგორც *უფლება*, ასევე *ვალდებულება* და მათი მდგომარეობის სიმეტრიულობის გამო კონტრაქტის დადებისას მისი ფასი ნულის ტოლია. ამიტომ, ოფციონური კონტრაქტები მათემატიკური თვალსაზრისით უფრო საინტერესოა და ჩვენ ძირითადად ყურადღებას ოფციონებზე და მათთან დაკავშირებულ ფასდადების პრინციპებზე გავამახვილებთ.

ოფციონებს, რომელთა მფლობელს აქვს შესაძლებლობა გამოიყენოს თავისი უფლება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის ნებისმიერ მომენტში (ანუ ნებისმიერ დროს ოფციონის აღსრულების მომენტამდე, ამ მომენტის ჩათვლით) უწოდებენ **ამერიკულ ოფციონებს**, ხოლო **ევროპულს** უწოდებენ ოფციონს, თუ მის მფლობელს კონტრაქტით მინიჭებული უფლების გამოყენება შეუძლია მხოლოდ ოფციონის აღსრულების მომენტში. თუმცა ევროპული ოფციონები უფრო ადვილად ექვემდებარებიან ანალიზს, პრაქტიკაში ოფციონების უმრავლესობა, რომლებითაც მსოფლიოს ბირჟებზე ვაჭრობენ, მაინც ამერიკული სტილისაა, რადგან ადრეული აღსრულების შესაძლებლობა მათ მფლობელს მეტ თავისუფლებას ანიჭებს.

იმ აქტივს, რომელზედაც ოფციონური კონტაქტი დაიდო, **საბაზისო აქტივს** უწოდებენ. განსაზღვრულობისთვის ჩვენ ოფციონის საფუძვლად ძირითადად აქციას გამოვიყენებთ.

განვიხილოთ ევროპული ყიდვის ოფციონი T-ს ტოლი აღსრულების დროით და დავუშვათ, რომ კონტრაქტის შეთანხმების ფასი არის K. აქციის ფასი ოფციონის აღსრულების დროს აღვნიშნოთ S_T-თი. ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება T მომენტში შეიძინოს აქცია (ან აქციების პაკეტი), რომელთა ღირებულება S_T შეიძლება არსებითად განსხვავდებოდეს K-სგან.

თუ $S_T > K$, ეს ხელსაყრელი აღმოჩნდება ოფციონის მყიდველისთვის, რადგან კონტრაქტი ანიჭებს მას უფლებას იყიდოს აქცია K ფასად, რაც მას შეუძლია განახორციელოს და შემდეგ მყისიერად გაყიდოს იგივე აქცია S_T საბაზრო ფასად. ამ ოპერაციის შედეგად მისი მოგება ტოლი იქნება $S_T - K$ სხვაობის.

თუ აღმოჩნდება, რომ $S_T < K$, მაშინ ის უბრალოდ არ გამოიყენებს თავის უფლებას, რადგან არა აქვს აზრი იყიდო აქცია K ფასად, თუ ამას არავინ გავალდებულებს და შესაძლებელია აქციის ყიდვა უფრო დაბალ S_T ფასად.

თუ გავაერთიანებთ ამ ორ შემთხვევას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ოფციონის მყიდველის მოგება T მომენტში განისაზღვრება ფორმულით

$f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$, სადაც $\mathrm{f(x)} = \max(\mathrm{x} - \mathrm{K}, 0) = \begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{K}, & \text{თუ } \mathrm{x} > \mathrm{K} \\ 0, & \text{თუ } \mathrm{x} \leq \mathrm{K} \end{cases}$

ამ ოფციონის შესაბამისი **გადახდის ფუნქციაა**.

ცხადია, ასეთი ფინანსური ინსტრუმენტის შესაძენად კონტრაქტის დადებისას გარკვეული C საფასურის (პრემიის) გადახდაა საჭირო. ამის გათვალისწინებით ყიდვის ოფციონის მფლობელის სუფთა მოგება ტოლი იქნება

$$\max(S_T - K, 0) - C = \begin{cases} (S_T - K) - C, & \text{თუ } S_T > \mathrm{K} \\ -C, & \text{თუ } S_T \leq \mathrm{K} \end{cases}$$

სიდიდის. შესაბამისად ოფციონის გამყიდველის შემოსავალი ამ კონტრაქტიდან იქნება საპირისპირო

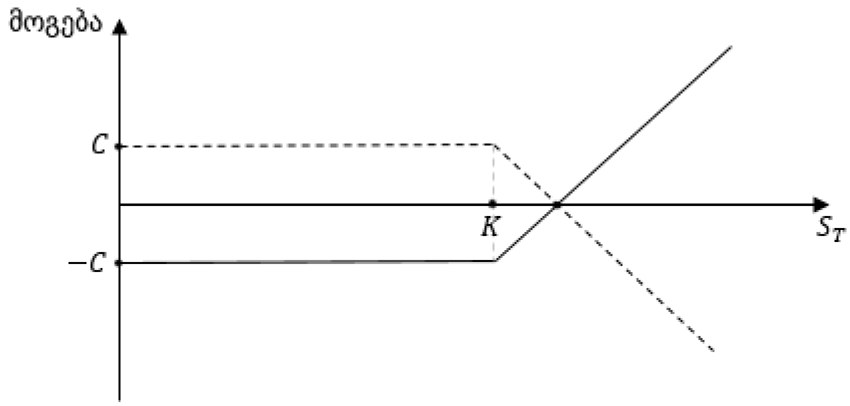
$$C - \max(S_T - K, 0) = \begin{cases} C - (S_T - K), & \text{თუ } S_T > \mathrm{K} \\ C, & \text{თუ } S_T \leq \mathrm{K}. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ყიდვის ოფციონის მყიდველისა და მისი გამყიდველის მდგომარეობა ერთმანეთისგან მნიშვნელოვნად განსხვავდება.

ოფციონის მყიდველს აქვს აქციის ფასის ზრდის მოლოდინი, ის ძირითადად დამკვირვებლის როლშია და მისი მდგომარეობა პასიურია. მისი რისკი შემოსაზღვრულია კონტრაქტში გადახდილი თანხით.

გაცილებით რთულია ოფციონის გამომშვების მდგომარეობა. მისი რისკი შემოუსაზღვრელია, რადგან აქციის ფასის ძლიერმა ზრდამ შეიძლება ის დიდი პრობლემების წინაშე დააყენოს და მან წინასწარ უნდა იფიქროს კონტრაქტის პირობების შესრულებაზე, მომავალში მოვლენების არასასურველი მიმართულებით განვითარების შესაძლებლობის გამო. გავითვალისწინოთ, რომ ოფციონის გამყიდველი ოფციონის საფასურს იღებს კონტრაქტის დადებისას და ვალდებულია გადაიხადოს აქციის შესაძლო ზრდით გამოწვეული წაგება კონტრაქტის ბოლოს, ოფციონის აღსრულების დროს. მას შეუძლია გამოიყენოს ეს დრო და ოფციონებში გადახდილი საფასური ისეთი პორტფელის შესაქმნელად, რომელიც მას მოსალოდნელი რისკისგან დაიცავს.

ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წყვეტილი ხაზით გამოსახულია ყიდვის ოფციონის გამყიდველის, ხოლო უწყვეტი ხაზით მისი მყიდველის, მოგება-დანაკარგები ოფციონის აღსრულების მომენტში აქციის S_T ფასის ცვლილების მიხედვით. ეს ხაზები სიმეტრიულია და ერთმანეთს კვეთს აბსცისთა ღერძის $(0, K+C)$ წერტილში, სადაც C ოფციონის, ხოლო K კონტრაქტის შეთანხმების ფასია.



ისმის ორი საკვანძო კითხვა:

1) რა უნდა იყოს ის „სამართლიანი" ფასი, რომელიც ოფციონის მყიდველმა უნდა გადაუხადოს ოფციონის გამყიდველს კონტრაქტის დადების დღეს მომავალში აღნიშნული უფლების მოსაპოვებლად და რა აზრით უნდა იყოს აღნიშნული ფასი სამართლიანი,

2) რა უნდა მოიმოქმედოს ოფციონის გამყიდველმა, რომ თავი დაიცვას მოსალოდნელი რისკისგან და შეასრულოს კონტრაქტის პირობები.

მიუხედავად იმისა, რომ ოფციონის ფასების ზოგიერთი თვისების შესწავლა შესაძლებელია გარკვეულ ზოგად დაშვებებსა და მოსაზრებებზე დაყრდნობით (მაგალითად, ოფციონების ფასების გარკვეული ზედა და ქვედა ზღვრების განსაზღვრა, ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ფასებს შორის კავშირის დადგენა და სხვა), ოფციონის ფასის ზუსტად განსაზღვრისთვის აუცილებელია აქციის ფასის ევოლუციის მოდელის ცოდნა. ჩვენ გავეცნობით ოფციონის ფასის გამოთვლის მეთოდოლოგიას ბინომური ხეების მოდელის მიხედვით, რომელშიც კარგად ჩანს ყველა ის თვალსაზრისი და მეთოდი, რომელიც ოფციონების ფასების განსაზღვრას საფუძვლად ედება. თუმცა, ამ ნაწილში განვიხილავთ მხოლოდ მარტივ ერთნაბიჯიან ბინომურ მოდელს და მის მაგალითზე ვაჩვენებთ, თუ რა პრინციპებზე დაყრდნობით და როგორ ხდება ოფციონების ფასების გამოთვლა.

დავუშვათ, რომ აქციის ფასი საწყის $t = 0$ მომენტში არის S, ხოლო $t = T$ მომენტში მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა S_u და $S_{d,}$ შესაბამისად p და $1 - p$ ალბათობით. განვიხილოთ ოფციონი (ან ზოგადად ფინანსური ვალდებულება), რომლის გადახდის ფუნქციაა $f(x)$, სადაც $f(x\ ) \geq 0$ ყველა $x \in R$-თვის და ოფციონის მფლობელი ოფციონის აღსრულების მომენტში იღებს $f(S_T)$ სიდიდის ტოლ მოგებას, ანუ $f(S_u)$ -ს ან $f(S_d)$ -ს იმის მიხედვით თუ როგორ შეიცვლება აქციის ფასი დროის $t = T$ მომენტში.

განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი, სადაც ბაზრის ყველა მონაწილეს აქვს საშუალება ამ აქციების ყიდვის და გაყიდვის, ურისკო საპროცენტო განაკვეთით თანხის დეპოზიტზე დადებისა და იმავე განაკვეთით სესხების. შესაძლებელია აქციის სესხება და მისი მოკლე გაყიდვა (ანუ იმ აქციის გაყიდვა, რომელსაც არ ფლობ).

ინვესტორის **პორტფელი** (ანუ მისი სტრატეგია) წარმოადგენს (α, β) წყვილს, სადაც α არის თანხა ინვესტირებული ურისკო აქტივში, ხოლო β აქციების რაოდენობაა. ვუშვებთ, რომ როგორც α-ს , ასევე β-ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი, მათ შორის უარყოფითი, მნიშვნელობა.

ასევე დავუშვათ, რომ ერთი აქტივის მეორეში გადატანასთან დაკავშირებული გარიგების ხარჯები მხედველობაში არ მიიღება.

გავაკეთოთ კიდევ რამდენიმე განმარტება.

საბანკო ანგარიში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფასიანი ქაღალდი, რომლის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ბანკი იღებს ვალდებულებას ანგარიშზე არსებულ თანხას გარკვეული პროცენტული შემოსავალი დაარიცხოს. ჩვენ გამოვიყენებთ პროცენტის მარტივი ერთჯერადი დარიცხვის წესს და დავუშვებთ, რომ დროის ნულოვან მომენტში დეპოზიტზე შეტანილი A თანხა დროის $t = T$ მომენტში გახდება $A(1 + r)$ -ს ტოლი, ანუ A თანხას ემატება მისი r პროცენტი, სადაც r-ს **ერთხელ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი** ჰქვია, ხოლო $\frac{1}{r+1}$ გამოსახულებას **დისკონტ ფაქტორს** უწოდებენ. თანხის დისკონტირება ნიშნავს მისი დღევანდელი მნიშვნელობის პოვნას.

დროის T მომენტში B თანხის დღევანდელი მნიშვნელობა (ანუ მისი მნიშვნელობა დროის ნულოვან მომენტში) ტოლია $\frac{B}{r+1}$ სიდიდის, რადგან ამ თანხის საბანკო ანგარიშზე დადებისას დროის T მომენტში r მარტივი საპროცენტო განაკვეთით დარიცხვის შემდეგ ის გახდება ზუსტად B თანხის ტოლი.

მოპასუხე პორტფელი და ფინანსურ ვალდებულებათა ჰეჯირება

ოფციონების ფასდადების ერთ-ერთი ძირითადი პრინციპია მოპასუხე პორტფელის შექმნა და ოფციონის ფასად ამ პორტფელის შესაბამისი საწყისი კაპიტალის გამოცხადება. განვიხილოთ ოფციონი ზოგადი $f(x)$ გადახდის ფუნქციით. შევნიშნოთ, რომ ყიდვის (შესაბამისად გაყიდვის) ოფციონის შემთხვევაში

$$f(x) = \max(x - K, 0) \ \ (\text{შესაბამისად, } f(x) = \max(K - x, 0)).$$

მოპასუხე პორტფელი არის აქციებისგან და დეპოზიტზე დასადები თანხისგან შედგენილი ისეთი პორტფელი, რომლის ფასი დროის T მომენტში ზუსტად უპასუხებს ოფციონის ტერმინალურ (საბოლოო) მოგებას. ანუ, გაუტოლდება $f(S_u)$ -ს, თუ $S_T = S_u$ და $f(S_d)$-ს, თუ $S_T = S_d$.

განვიხილოთ (α, β) პორტფელი, რომელიც შედგება β რაოდენობის აქციებისგან და დეპოზიტზე დასადები α თანხისგან. ამ პორტფელის საწყისი ფასია $\alpha + \beta S$ და T მომენტში მისი ფასი გაუტოლდება შემთხვევით სიდიდეს

$$\alpha(1+r) + \beta S_T = \begin{cases} \alpha(1+r) + \beta S_u\,, & \text{თუ } S_T = S_u \\ \alpha(1+r) + \beta S_d\,, & \text{თუ } S_T = S_d \end{cases} \tag{1}$$

ასეთ პორტფელს (სტრატეგიას) აგრეთვე **ჰეჯს** უწოდებენ (hedge ინგლისურად ნიშნავს ღობეს და აქ ეს სიტყვა რისკისგან თავის დაცვის აზრით არის გამოყენებული), ხოლო შესაბამისი სტრატეგიით ფინანსური ვალდებულების მიღწევის პროცესს – **ჰეჯირებას**.

ცხადია, პორტფელი მოპასუხეა, თუ (α, β) წყვილი აკმაყოფილებს შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta S_u = f(S_u)\,, \\ \alpha(1+r) + \beta S_d = f(S_d)\,, \end{cases} \tag{2}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია

$$\alpha^* = -\frac{S_d f(S_u) - S_u f(S_d)}{(1+r)(S_u - S_d)}, \quad \beta^* = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{S_u - S_d} \tag{3}$$

ოფციონის ფასი არის (α^*, β^*) პორტფელის ღირებულება დროის $t = 0$ მომენტში

$$C = C(f) = \alpha^* + \beta^* S = \frac{1}{r+1}\left(f(S_u)\frac{S(r+1) - S_d}{S_u - S_d} + f(S_d)\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}\right), \tag{4}$$

რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს

$$C(f) = \frac{1}{r+1}\left(\pi f(S_u) + (1-\pi) f(S_d) \right), \tag{5}$$

სადაც $\pi = \frac{(1+r)S - S_d}{S_u - S_d}$.

ყიდვის (ასევე გაყიდვის) ოფციონისთვის უნდა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც

$$S_d \leq K \leq S_u. \tag{6}$$

დანარჩენი ორი შემთხვევა არ არის საინტერესო: თუ $K < S_d$, ოფციონის მფლობელი ყველა შემთხვევაში მოიგებს არანაკლებ $S_d - K$ სხვაობის ტოლ თანხას და ოფციონის გამყიდველი ყოველთვის განიცდის დანაკარგს. პირიქით, თუ $S_u < K$, მაშინ საწინააღმდეგოა სამართლიანი.

რადგან ყიდვის ოფციონის გადახდის ფუნქციაა $\mathrm{f(x) = max(x - K, 0)}$, (6) დაშვების ძალით $f(S_u) = S_u - K$, $f(S_d) = 0$, და (3)-(5) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ ყიდვის ოფციონის შემთხვევაში მოპასუხე პორტფელია

$$\alpha^* = -\frac{\mathrm{S_d(S_u - K)}}{\mathrm{(1+r)(S_u - S_d)}}, \quad \beta^* = \frac{\mathrm{S_u - K}}{\mathrm{S_u - S_d}} \tag{7}$$

წყვილი და მისი ფასი ტოლი იქნება

$$C = \frac{S_u - K}{S_u - S_d}\left(S - \frac{S_d}{r+1}\right). \tag{8}$$

როგორც ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, ოფციონის ფასი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ალბათობები აქვს მინიჭებული აქციის ფასის ზევით და ქვევით მოძრაობის შესაძლებლობებს. ანუ, ოფციონის ფასი ინვარიანტულია ამ ალბათობების და ინდივიდების მიერ ბაზრის ქცევის შეფასების მიმართ. ეს ფაქტი მოულოდნელია და თითქოს ეწინააღმდეგება ინტუიციას. უფრო ბუნებრივი მოგვეჩვენებოდა, თუ აქციის ფასის ზევით მოძრაობის ალბათობის ზრდა გამოიწვევდა ყიდვის ოფციონის ფასის ზრდასაც და პირიქით.

ხსენებული ფაქტის ახსნა შეიძლება შემდეგი მოსაზრებით. ოფციონის ფასი გამოითვლება აქციის ფასის ტერმინებში და ინფორმაცია ფასის მომავალი ზრდის ან კლების შესახებ მთლიანად გათვალისწინებულია აქციის ფასში, რასაც ჰეჯირების პროცესი უზრუნველყოფს. ამიტომ, მისი ხელმეორედ მხედველობაში მიღება აღარ არის საჭირო.

მიუხედავად ზემოთქმულისა, ოფციონის ფასის გამოსახულებას შეიძლება მიეცეს ალბათური ინტერპრეტაცია. მართლაც, როდესაც S_u და S_d სიდიდეები აკმაყოფილებენ $S_d < (1+r)S < S_u$ ორმხრივ უტოლობას, მაშინ

$$0 < \pi = \frac{\mathrm{(1+r)S - S_d}}{\mathrm{S_u - S_d}} < 1 \tag{12}$$

და π -ს შეიძლება მიენიჭოს ალბათური აზრი, ხოლო ოფციონის ფასი (5) ფორმულის მიხედვით ამ შემთხვევაში გამოდის π ალბათობით გამოთვლილი საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა (r-ის ტოლი ურისკო საპროცენტო განაკვეთით).

არა არბიტრაჟი, ანუ ურისკო მოგების შეუძლებლობა

ამბობენ, რომ ბაზარზე არსებობს **არბიტრაჟის** (ანუ, ურისკო მოგების) შესაძლებლობა, თუ ინვესტორს $t = 0$ მომენტში ნულოვანი საწყისი კაპიტალით შეუძლია ისეთი პორტფელის არჩევა, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის $t = T$ მომენტში დადებითი იქნება ალბათობით 1 და ნულისგან განსხვავებული დადებითი ალბათობით.

ჩვენ მიერ განხილულ მოდელში არბიტრაჟის არსებობა ნიშნავს ისეთი (α, β) პორტფელის არჩევის შესაძლებლობას, რომლის შესაბამისი საწყისი კაპიტალი $\alpha + \beta S$ ნულის ტოლია და სამართლიანია უტოლობები

$\alpha(1 + r) + \beta S_u \geq 0,\ \ \alpha(1 + r) + \beta S_d \geq 0,$

რომელთაგან ერთ-ერთი უტოლობა მკაცრია.

წინადადება 1. ბაზარზე არ არსებობს არბიტრაჟის შესაძლებლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$S_d < (1 + r)S < S_u. \tag{8}$$

დამტკიცება: ვთქვათ არ სრულდება (8) პირობა. მაშინ ან $(1 + r)S \leq S_d$, ან

$(1 + r)S \geq S_u$. პირველ შემთხვევაში ინვესტორს შეუძლია ისესხოს S თანხა და ამ ფასად იყიდოს ერთი აქცია. დროის T მომენტში ის გაყიდის ამ აქციას S_u ან S_d ფასად და ბანკის $(1 + r)S$ -ის ტოლი ვალის დაბრუნების შემდეგ კიდევ დარჩება სულ მცირე $S_d - (1 + r)S$ დადებითი სიდიდის ტოლი მოგება. მსგავსი მსჯელობა შეგვიძლია გამოვიყენოთ $(1 + r)S \geq S_u$ შემთხვევაში.

ახლა დაუშვათ, რომ სრულდება (8) პირობა. ვაჩვენოთ, რომ ამ ბაზარზე გამორიცხულია არბიტრაჟის შესაძლებლობა.

(8) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს ისეთი π რიცხვის არსებობა, რომ $0 < \pi < 1$ და

$$\pi S_u + (1 - \pi)\, S_d = (1 + r)S. \tag{9}$$

მართლაც, თუ ავიღებთ

$$\pi = \frac{(1+r)S - S_d}{S_u - S_d}, \quad \text{მაშინ} \quad 0 < \pi < 1, \quad 1 - \pi = \frac{S_u - (1+r)S}{S_u - S_d}, \tag{10}$$

და ადვილი შესამოწმებელია, რომ სრულდება (9) ტოლობა.

ვთქვათ (α, β) ისეთი პორტფელია, რომლისთვისაც

$$\alpha(1+r) + \beta S_u \geq 0, \quad \alpha(1+r) + \beta S_d \geq 0, \tag{11}$$

სადაც ერთ-ერთი უტოლობა მკაცრია. მაშინ, თუ პირველ უტოლობას გავამრავლებთ π -ზე, მეორეს $1-\pi$ -ზე და ამ უტოლობებს შევკრებთ, (9) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\alpha(1+\mathrm{r}) + \beta(\pi \mathrm{S_u} + (1-\pi)\, \mathrm{S_d}) = \alpha(1+\mathrm{r}) + \beta(1+\mathrm{r})\mathrm{S} > 0\,,$$

რადგან (11) უტოლობებიდან ერთ-ერთი მკაცრია, საიდანაც ვიღებთ, რომ ამ პორტფელის შესაბამისი საწყისი კაპიტალი დადებითია $\alpha + \beta S > 0$.

ეს ნიშნავს, რომ (11) უტოლობები ნულოვანი საწყისი კაპიტალით ვერ მიიღწევა, რაც გამორიცხავს არბიტრაჟის შესაძლებლობას.

ვიგულისხმოთ, რომ ამ ბაზარზე გამორიცხულია არბიტრაჟის (ურისკო მოგების) შესაძლებლობა, ანუ დავუშვათ, რომ სრულდება (8) ორმხრივი უტოლობა. მაშინ ზემოთ გამოთვლილი ოფციონის ფასიც იქნება არაარბიტრაჟული. ანუ ასეთი ფასით ოფციონის გაყიდვით ვერც ოფციონის მყიდველი და ვერც მისი გამყიდველი მოახერხებს ურისკო მოგების მიღებას.

ვაჩვენოთ, რომ თუ ოფციონს დავადებთ $C(f)-$ ისგან განსხვავებულ სხვა ფასს, ვთქვათ $\overline{C}\,(f)-$ს, სადაც $\overline{C}\,(f) \neq C(f)$, მაშინ ბაზარზე არბიტრაჟის შესაძლებლობა წარმოიქმნება.

მართლაც, თუ ოფციონის გამომშვები გაყიდის ოფციონს $\overline{C}\,(f) > C(f)$ ფასად, მაშინ ის ურისკოდ მიიღებს $\overline{C}\,(f) - C(f)$ სხვაობის ტოლ მოგებას, რადგან მიღებული თანხის $C(f)$ ნაწილით ის შექმნის (α^*, β^*) მოპასუხე პორტფელს (ისე, როგორც ზევით არის აღწერილი) და სრულად გაისტუმრებს ოფციონის მყიდველს ოფციონის აღსრულების მომენტში. მსგავსი მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ $\overline{C}\,(f) < C(f)$ შემთხვევაშიც, რა დროსაც ურისკო მოგება შეუძლია მიიღოს უკვე ოფციონის მყიდველმა.

რისკ-ნეიტრალური ზომა და მასთან დაკავშირებული ფასდადების პრინციპი.

როგორც უკვე ვნახეთ, თუ სრულდება პირობა $S_d < (1+r)S < S_u$, მაშინ არსებობს $0 < \pi < 1$, რომლისთვისაც სამართლიანია ტოლობა

$$\pi S_u + (1-\pi)\, S_d = (1+r)S. \tag{13}$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს საშუალო მოგებას მიღებულს აქციის ყიდვით S ფასად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ აქციის ფასის ზრდა დროის T მომენტში ხდება π ალბათობის მიხედვით, ხოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეს არის თანხა, რომელიც მიიღება კონტრაქტის ბოლოს, მის საწყის მომენტში S თანხის საბანკო ანგარიშზე (r საპროცენტო განაკვეთით) ინვესტირებისას. ეს ტოლობა ასევე შემდეგი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს

$$E^{\pi} S_T = (1+r)S, \qquad (14)$$

სადაც E^{π} აღნიშნავს მათემატიკურ ლოდინს გამოთვლილს π ალბათური ზომით.

ტოლობა (14) გვეუბნება, რომ ეს მოდელი არის ნეიტრალური რისკის მიმართ: ინვესტორი ინდიფერენტულია (განურჩეველია) ინვესტირების ორი (ურისკო და რისკის შემცველი) შესაძლებლობის არჩევისას, რადგან ორივე შემთხვევაში მისი საშუალო მოგება ერთი და იგივეა.

ოფციონების ფასდადების ერთ-ერთი მთავარი პრინციპია **რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპი**. ამ პრინციპის თანახმად, ფასიანი ქაღალდების სამყარო იგულისხმება რისკ-ნეიტრალურად. ამ სამყაროში ნებისმიერი ფინანსური ვალდებულების (მათ შორის ოფციონების) ფასი განისაზღვრება ისე, რომ ამ ინსტრუმენტის დამატებით სამყარო კვლავ რისკ-ნეიტრალური რჩება.

წინადადება 2. ოფციონის ფასი არის მისი საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი „რისკ-ნეიტრალური" ალბათური ზომის მიხედვით.

დამტკიცება: ოფციონის მფლობელის საბოლოო მოგება ტოლია $f(S_u)$ ან $f(S_d)$ სიდიდის, იმის მიხედვით, თუ აქციის რა ფასია რეალიზებული ოფციონის აღსრულების მომენტში. რადგან T მომენტში ერთეულოვანი თანხის დღევანდელი მნიშვნელობა (მნიშვნელობა $t=0$ მომენტში) ტოლია $\frac{1}{1+r}$ -ის, ოფციონის რეალიზებული მოგების დღევანდელი მნიშვნელობა ტოლი იქნება $\frac{1}{1+r}\ f(S_u)$ ან $\frac{1}{1+r}\ f(S_d)$ სიდიდის. თუ $\frac{1}{1+r}\ f(S_T)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ვიანგარიშებთ რისკ-ნეიტრალური π ალბათური ზომის მიმართ, მივიღებთ

$$E^{\pi}\ \frac{f(S_T)}{r+1} = \frac{1}{r+1}\left(\ \pi f(S_u)\ + (1-\pi) f(S_d)\ \right),$$

გამოსახულებას, რომელიც ოფციონის ადრე გამოთვლილ ფასს ემთხვევა.

მაგალითად, აქედან გამომდინარეობს, რომ ყიდვის ოფციონის ფასი ტოლია

$$C = E^{\pi}\,\frac{\max(S_T - K, 0)}{r+1} = \frac{\pi\, S_u}{r+1} - \text{ის} \qquad (15)$$

და თუ ამ ფორმულაში π -ის ნაცვლად მის გამოსახულებას ჩავსვამთ (რომელიც (10) ფორმულით მოიცემა), ეს ფასიც ყიდვის ოფციონის ადრე გამოთვლილ ფასს დაემთხვევა. ანალოგიურად, რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპის მიხედვით გაყიდვის ოფციონის ფასი ტოლია

$$E^{\pi}\,\frac{\max(K-S_T,0)}{r+1} = \frac{(1-\pi)\,S_d}{r+1} = \frac{S_d\,(S_u - (1+r)S)}{(S_u - S_d)(r+1)}\,. \qquad (16)$$

რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპის მიხედვით ოფციონების ფასების გამოთვლა განსაკუთრებით მოხერხებულია გამოთვლების სიმარტივის გამო, რაც კარგად გამოჩნდება მრავალნაბიჯიანი ბინომური ხეების მიხედვით ოფციონების ფასების გამოთვლისას, რომელსაც შემდეგ ნაწილში განვიხილავთ.

შემდეგი ტოლობა ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის (Put-Call Parity) სახელით არის ცნობილი.

წინადადება 3. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$C = P + S - \frac{K}{r+1}\,, \qquad (17)$$

სადაც C ყიდვის, ხოლო P გაყიდვის ოფციონის ფასია.

დამტკიცება: ადვილი საჩვენებელია, რომ

$\max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K.$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ჯერ გავყოფთ $1 + r$ -ზე და შემდეგ ავიღებთ მათემატიკურ ლოდინს რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომის მიმართ, მივიღებთ

$$E^{\pi}\,\frac{\max(S_T-K,0)}{r+1} - E^{\pi}\,\frac{\max(K-S_T,0)}{r+1} = E^{\pi}\,\frac{f(S_T)}{r+1} - \frac{K}{r+1}.$$

აქედან გამომდინარეობს (17) ტოლობის სამართლიანობა, რადგან (14) ტოლობის თანახმად $E^{\pi}\,\frac{f(S_T)}{r+1} = S$ და (15) - (16) ფორმულების მიხედვით, $E^{\pi}\,\frac{\max(S_T-K,0)}{r+1}$ და $E^{\pi}\,\frac{\max(K-S_T,0)}{r+1}$ სიდიდეები, შესაბამისად ყიდვის და გაყიდვის ოფციონების ფასებს ემთხვევა.

შენიშვნა. (17) ტოლობის დამტკიცება შეიძლება ზოგადადაც, აქციის ფასის ევოლუციის მოდელის გარეშე, თუ დავუშვებთ, რომ ბაზარზე არ არსებობს არბიტრაჟის შესაძლებლობა. თუ ეს ტოლობა არ სრულდება, ანუ რომელიმე მხარეს მკაცრი უტოლობაა სამართლიანი, მაშინ იარსებებს ისეთი პორტფელი, რომელიც მის მფლობელს ურისკო მოგების შესაძლებლობას მისცემს.

ოფციონებთან დაკავშირებული რისკი და მოგების პოტენციალი

ერთ-ერთი მიზეზი, რის გამოც ინვესტორები ყიდვის ოფციონს ყიდულობენ ის არის, რომ საბაზისო აქტივის კურსის ზრდის დროს ამ ოფციონებში ინვესტირებული თანხით გაცილებით დიდი მოგებაა შესაძლებელი, ვიდრე იგივე თანხის პირდაპირ საბაზისო აქტივში (ანუ აქტივში, რომელზეც ოფციონი დაიწერა) დაბანდებისას. ოფციონის მოგების პოტენციალი, ისევე როგორც მასთან დაკავშირებული დანაკარგები, საბაზისო აქტივის ფასთან შედარებით, მისი მცირე ფასით არის განპირობებული, რაც შემდეგი მაგალითიდანაც ჩანს და ქვემოთ მოყვანილი წინადადების დამტკიცებისას დასტურდება.

ვთქვათ აქციაზე, რომლის მიმდინარე ფასი 100 დოლარია, გამოშვებულია ყიდვის ოფციონი 100 დოლარის ტოლი შეთანხმების ფასით. დაუშვათ ამ ოფციონის ფასი 4 დოლარის ტოლია. ინვესტორს, რომელსაც 100 დოლარის ტოლი კაპიტალი გააჩნია, შეუძლია იყიდოს ერთი აქცია, ან დააბანდოს მთელი ეს თანხა ოფციონებში და იყიდოს 25 ყიდვის ოფციონი. მაგალითად, თუ აქციის ფასი გაიზარდა და ოფციონის აღსრულების მომენტში გახდა 106 დოლარი, მაშინ მისი მოგება აქციიდან 6 დოლარის (ანუ ინვესტირებული თანხის 6%) ტოლი იქნება. მეორეს მხრივ, 25 ოფციონის ყიდვის შემთხვევაში, ოფციონის აღსრულების დღეს ინვესტორი მიიღებს $25 \times (106 - 100) - 25 \times 4 = 50$ დოლარის ტოლ მოგებას, ანუ ინვესტირებული თანხის ნახევარს.

მეორე მხრივ, თუ აქციის კურსი ოფციონის აღსრულების მომენტში არ შეიცვალა (ან უმნიშვნელოდ დაეცა), მაშინ აქციის მფლობელი არაფერს კარგავს (ან კარგავს უმნიშვნელო თანხას), ხოლო აღნიშნული თანხის ოფციონებში ინვესტირებისას იკარგება მთელი თანხა, კერძოდ, 25-ჯერ ოფციონის ფასი.

დაუშვათ, რომ აქციის ფასი იზრდება p ალბათობით და ყველა გამოთვლას ამ პარაგრაფში ვაწარმოებთ ამ ალბათური ზომის მიმართ.

ფასიანი ქაღალდების შედარება უფრო ბუნებრივია არა აბსოლუტური, არამედ ფარდობითი სიდიდეებით. ერთ-ერთ ასეთ მახასიათებელს წარმოადგენს აქციის ფასის ამონაგები, რომელიც განიმარტება როგორც ფარდობა $R = \frac{S_T - S}{S}$. მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლი იქნება

$$M_S = \frac{pS_u + (1-p)\, S_d}{S} - 1 \qquad (18)$$

სიდიდის, სადაც აქციის ფასი S_u და S_d მნიშვნელობებს იღებს შესაბამისად p და 1 - p ალბათობით. აქციასთან დაკავშირებული რისკი ჩვეულებრივ იზომება მისი ამონაგების ვარიაციით (დისპერსიით):

$$V_S^2 = p\left(\frac{S_u - S}{S} - M_S\right)^2 + (1-p)\left(\frac{S_d - S}{S} - M_S\right)^2, \tag{19}$$

საიდანაც, (18) ტოლობის გათვალისწინებით ვიღებთ სიდიდეს

$$V_S = \frac{S_u - S}{S}\ (p(1-p))^{1/2}, \tag{20}$$

რომელიც აქციის ამონაგების სტანდარტულ გადახრას წარმოადგენს და მას აქციის ვოლატილობა (ცვალებადობის ზომა) შეიძლება ვუწოდოთ.

შევნიშნოთ, რომ განხილული დაშვების მიხედვით საბანკო ანგარიშზე დადებული ნებისმიერი თანხის ამონაგები r საპროცენტო განაკვეთის ტოლია.

ვთქვათ C არის ყიდვის ოფციონის ფასი და $\beta = \beta^*$ აქციების რაოდენობაა, რომელიც საჭიროა ამ ოფციონისთვის მოპასუხე პორტფელის შესაქმნელად (ეს არის მოპასუხე პორტფელის $\beta = \beta^*$ (3) ფორმულიდან), ანუ

$$\beta = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{S_u - S_d}. \tag{21}$$

ოფციონის ელასტიურობა განისაზღვრება შემდეგი ფარდობით

$$\mathcal{E}l = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{C} \Big/ \frac{S_u - S_d}{S}, \tag{22}$$

რომელიც β-ს საშუალებით შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს

$$\mathcal{E}l = \frac{S}{C}\ \beta, \tag{23}$$

სადაც C ოფციონის ფასია.

აღვნიშნოთ M_C და V_C - თი შესაბამისად ოფციონის ამონაგების საშუალო მნიშვნელობა და ვოლატილობა:

$$M_C = \frac{pf(S_u) + (1-p)f(S_d)}{C} - 1, \tag{24}$$

$$V_C = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{C}\ (p(1-p))^{1/2} \tag{25}$$

წინადადება 4. ვთქვათ მოცემულია ყიდვის ოფციონი, რომლის შეთანხმების ფასი K აკმაყოფილებს პირობას $S_u < K < S_d$. მაშინ

a) ყიდვის ოფციონის ვოლატილობა მეტია მისი საბაზისო აქტივის ვოლატილობაზე:

$$\mathrm{V_C} > \mathrm{V_S}\,.$$

b) ყიდვის ოფციონის და აქციის საშუალო ამონაგებებს შორის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა

$$\mathrm{M_C} - \mathrm{r} = \mathrm{El}\,(\mathrm{M_S} - \mathrm{r}), \text{ სადაც } \mathrm{El} > 1. \tag{26}$$

შევნიშნოთ, რომ ყიდვის ოფციონის ეს უკანასკნელი თვისება ხელსაყრელს ხდის მის ყიდვას.

დამტკიცება: რადგან (20) და (25) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{V_C}{V_S} = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{C}\,\frac{S_u - S_d}{S} = \mathrm{El}\,,$$

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყიდვის ოფციონის ელასტიურობის კოეფიციენტი ერთზე მეტია, $\mathrm{El} > 1$. ყიდვის ოფციონის ფასი შეგვიძლია შემდეგი სახითაც ჩავწეროთ

$$C = \frac{(S_u - K)(S(r+1) - S_d)}{(S_u - S_d)(r+1)}\,. \tag{27}$$

ამიტომ, (21) და (27) ტოლობების გათვალისწინებით

$$\mathrm{El} = \frac{S}{C}\,\beta = \frac{S(r+1)}{S(r+1) - S_d},$$

რაც ცხადია მეტია 1-ზე, რადგან $S_d > 0$.

ახლა დავადგინოთ დამოკიდებულება M_C -სა და M_S -ს შორის. ამისათვის გამოვიყენოთ მოპასუხე პორტფელი $(\alpha,\ \beta)$, რომლის საწყისი კაპიტალი ოფციონის ფასს ემთხვევა $C = \alpha + \beta S$ და რომლისთვისაც სრულდება ტოლობები

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta S_u = f(S_u)\,, \\ \alpha(1+r) + \beta S_d = f(S_d)\,. \end{cases}$$

თუ ამ ტოლობებში α ნაცვლად ჩავსვამთ $\mathrm{C} - \beta\,\mathrm{S}$ გამოსახულებას, გვექნება

$$\beta S_u - f(S_u) = -(1+r)(C - \beta\,\mathrm{S})\,,$$
$$\beta S_d - f(S_d) = -(1+r)(C - \beta\,\mathrm{S}).$$

პირველი განტოლების ორივე მხარის p-ზე, მეორე განტოლების ორივე მხარის $1-p$-ზე გამრავლებისა და მიღებული ტოლობების შეკრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$p(\beta S_u - f(S_u)) + (1-p)\big(\beta S_d - f(S_d)\big) = -(1+r)(C - \beta\,\mathrm{S}),$$

რაც ეკვივალენტურია წევრების გადაჯგუფების შედეგად მიღებული შემდეგი ტოლობის

$$\beta(pS_u + (1-p)S_d) + (p\, f(S_u) + (1-p)\, f(S_d) = (1+r)(\beta S - C). \qquad (28)$$

რადგან (24) და (18) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$p\, f(S_u) + (1-p)\, f(S_d) = C(M_C + 1)$ და

$pS_u + (1-p)S_d = S(M_S + 1)$,

ამ უკანასკნელი ტოლობების (28)-ში ჩასმის და მსგავსი წევრების შეკრების შემდეგ მივიღებთ

$$S\beta M_S - CM_C = r(\beta S - C).$$

ორივე მხარის C -ზე გაყოფის შედეგად საბოლოოდ ვიღებთ, რომ

$$M_S \frac{S\beta}{C} - M_C = r\left(\frac{S\beta}{C} - C\right),$$

საიდანაც (26) ტოლობა გამომდინარეობს.