1) ვთქვათ აქციის ფასი საწყის $t = 0$ მომენტში არის S=100 დოლარი, ხოლო $t = T$ მომენტში მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა $S_u = \$128$ და $S_d = \$88$. განვიხილოთ ყიდვის ოფციონი, რომლის შეთანხმების ფასია $K = \$112$ და ერთხელ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r = 0.1$-ის ტოლია. იპოვეთ

ა) მოპასუხე პორტფელი,
ბ) რისკ-ნეიტრალური ალბათობა,
ბ) ყიდვის ოფციონის ფასი,
გ) იგივე შეთანხმების ფასის მქონე გაყიდვის ოფციონის ფასი.

2) ისარგებლეთ რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპით და ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით გამოთვალეთ ფინანსური ვალდებულების ფასი, რომლის მოგება დროის T და ნულოვან მომენტებში აქციის ფასებს შორის $S_T - S$ სხვაობის ტოლია.

3) აჩვენეთ, აქციის ფასის ევოლუციის ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის გამოყენებით, რომ ყიდვის ოფციონის ფასი ყოველთვის იზრდება r საპროცენტო განაკვეთის ზრდის დროს.

4) აჩვენეთ, რომ ყიდვის (შესაბამისად, გაყიდვის) ოფციონის ფასი ყოველთვის კლებულობს (შესაბამისად, იზრდება) კონტრაქტის შეთანხმების ფასის ზრდის დროს (ამის დამტკიცება შეგიძლიათ ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის გამოყენების გარეშეც).

5) ვთქვათ ფინანსურ ბაზარზე არ არსებობს არბიტრაჟის (ურისკო მოგების) შესაძლებლობა. აჩვენეთ, რომ

ა) ყიდვის ოფციონის ფასი ყოველთვის ნაკლებია (ან ტოლი) საბაზისო აქციის S ფასზე დროის საწყის $t = 0$ მომენტში,

$$C \leq S.$$

ბ) გაყიდვის ოფციონის ფასი ყოველთვის ნაკლებია (ან ტოლი) შეთანხმების ფასის დისკონტირებულ მნიშვნელობაზე, ანუ

$$P \leq \frac{K}{r+1}.$$

6) ვთქვათ ინვესტორი ფლობს ერთ აქციას, რომლის ფასი დროის ნულოვან მომენტში 110 დოლარია და მან 4 დოლარად შეიძინა ამ აქციაზე გაყიდვის ოფციონი 100 დოლარის ტოლი შეთანხმების ფასით. აქციისა და ოფციონის ასეთ კომბინაციას დამცველ პუტს უწოდებენ, რადგან ასეთი ოფციონი აზღვევს აქციის მფლობელს აქციის კურსის დაცემისგან. ააგეთ ამ კომბინაციის ტერმინალური მოგება-დანაკარგების გრაფიკი (ან ანალიზურად ჩაწერეთ ფუნქციის სახით) ოფციონის აღსრულების მომენტში აქციის ფასის შესაძლო ცვლილებების მიხედვით.

7) დავუშვათ, რომ აქციის ღირებულება დროის ნულოვან მომენტში 61 დოლარია. წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომელმაც შეიძინა ერთი ყიდვის ოფციონი $55 შეთანხმების ფასით 10 დოლარად, ერთი ყიდვის ოფციონი $65 შეთანხმების ფასით 5 დოლარად და გაყიდა ორი ყიდვის ოფციონი $60 შეთანხმების ფასით, თითოეული 7 დოლარად.
ააგეთ ამ კომბინაციის ტერმინალური მოგება-დანაკარგების გრაფიკი (ან ანალიზურად ჩაწერეთ ფუნქციის სახით) ოფციონის აღსრულების მომენტში აქციის ფასის შესაძლო ცვლილებების მიხედვით.

8) აჩვენეთ, აქციის ფასის ევოლუციის ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის გამოყენების გარეშე, ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ტოლობის

$$\mathrm{C} = \mathrm{P} + \mathrm{S} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{r}+1}$$

სამართლიანობა, სადაც C ყიდვის, ხოლო P გაყიდვის ოფციონის ფასია და K შეთანხმების ფასი ორივე ოფციონისთვის ერთი და იგივეა. ისარგებლეთ მხოლოდ დაშვებით, რომ ფინანსურ ბაზარზე არ არსებობს არბიტრაჟის შესაძლებლობა.

9) აჩვენეთ, რომ ყიდვისა და გაყიდვის ოფციონების ფასები აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$C > S - \frac{K}{r+1}, \qquad P > \frac{K}{r+1} - S,$$

სადაც C ყიდვის, ხოლო P გაყიდვის ოფციონის ფასია. S არის აქციის ფასი კონტრაქტის დასაწყისში, K ამ ოფციონების შეთანხმების ფასია, r კი - მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი.

10) ვთქვათ $C(1), C(2), C(3)$ ყიდვის ოფციონის ფასებია, რომელთა შეთანხმების ფასები შესაბამისად $K(1), K(2)$ და $K(3)$ -ის ტოლია, სადაც $K(2) = \frac{K(1)+K(3)}{2}$. აჩვენეთ, რომ

$$C(2) \leq \frac{C(1)+C(3)}{2}.$$

ამოხსნები

1) ა) რისკ-ნეიტრალური ალბათობა ანგარიშდება შემდეგი ტოლობიდან

$$\pi S_u + (1-\pi)\, S_d = (1+r)S,$$

სადაც ამოცანის მონაცემების ჩასმის შემდეგ ვიღებთ განტოლებას

$$128\,\pi + (1-\pi)\,88 = 110,$$

რომლის ამოხსნაა $\pi = 11/20$.

ბ) რადგან ამ შემთხვევაში $f(S_u) = 16$ და $f(S_d) = 0$ მოპასუხე პოტფელის საპოვნელად უნდა ამოვსხნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 1.1\alpha + 128\beta = 16\,, \\ 1.1\alpha + 88\beta = 0\,, \end{cases}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნია $\alpha = -32, \beta = 2/5$ წყვილი.

გ) ყიდვის ოფციონის ფასი ტოლია $C = \alpha + \beta S = -32 + 100 \times \frac{2}{5} = 8.$

დ) გაყიდვის ოფციონის ფასი დავთვალოთ რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომის გამოყენებით. რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპის თანახმად

$$P = \frac{K-S_d}{1+r}\,(1-\pi) = \frac{24}{1.1}\left(1-\frac{11}{20}\right) = 9\frac{9}{11}.$$

2) რადგან ფინანსური ვალდებულების ფასი არის მისი საშუალო ტერმინალური მოგების დისკონტირებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი „რისკ-ნეიტრალური“ ალბათური ზომის მიხედვით გვექნება, რომ

$$E^{\pi}\,\frac{S_T-S}{r+1} = \frac{1}{r+1}\,\big(\,\pi(S_u-S) + (1-\pi)(S_d-S)\big)\,,$$

სადაც π რისკ ნეიტრალური ალბათობაა, ანუ ისეთი ალბათობა, რომლისთვისაც

$$\pi S_u + (1-\pi)\, S_d = (1+r)S.$$

ამიტომ,

$$E^{\pi}\ \frac{S_T - S}{r+1} = \frac{rS}{r+1}$$

3) აქციის ფასის ევოლუციის ერთნაბიჯიანი ბინომური მოდელის მიხედვით ყიდვის ოფციონის ფასი ტოლია.

$$C = \frac{S_u - K}{S_u - S_d}\left(S - \frac{S_d}{r+1}\right)$$

რადგან საპროცენტო განაკვეთის ზრდისას $\frac{S_d}{r+1}$ სიდიდის მნიშვნელობა კლებულობს, $S - \frac{S_d}{r+1}$ სხვაობა გაიზრდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყიდვის ოფციონის ფასიც გაიზრდება საპროცენტო განაკვეთის ზრდის დროს.

4) ვთქვათ ყიდვის ოფციონის ფასი, რომლის შეთანხმების ფასია K_1, ტოლია $C(K_1)$ − ის, ხოლო $C(K_2)$ − ით აღვნიშნოთ ყიდვის ოფციონის ფასი K_2 -ის ტოლი შეთანხმების ფასით. დავუშვათ, რომ $K_1 \geq K_2$. ვგულისხმობთ, რომ ამ ოფციონების სხვა პარამეტრები ერთი და იგივეა.

უნდა ვაჩვენოთ, რომ $C(K_1) \leq C(K_2)$.

დაუშვათ საწინააღმდეგო $C(K_1) > C(K_2)$.

შევადგინოთ შემდეგი პორტფელი ორი ყიდვის ოფციონისგან. გავყიდოთ ერთი ოფციონი (რომლის შეთანხმების ფასია K_1) $C(K_1)$ ფასად და შევიძინოთ მეორე ოფციონი (რომლის შეთანხმების ფასია K_2) $C(K_2)$ ფასად.

ოფციონის აღსრულების მომენტში პირველი ოფციონიდან გადასახდელი გვექნება თანხა $\max(S_T - K_1, 0)$, ხოლო მეორედან მივიღებთ $\max(S_T - K_2, 0)$ თანხის ტოლ მოგებას. ამიტომ, ჩვენი მოგება ოფციონის აღსრულების მომენტში ტოლი იქნება

$C(K_1) - C(K_2) + \max(S_T - K_2, 0) - \max(S_T - K_1, 0)$ სიდიდის. მაგრამ

$$\max(S_T - K_2, 0) - \max(S_T - K_1, 0) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } S_T < K_2 \\ S_T - K_2, & \text{თუ } K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ K_1 - K_2, & \text{თუ } S_T > K_1 \end{cases}$$

სიდიდე ყოველთვის არაუარყოფითია, ხოლო სხვაობა $C(K_1) - C(K_2)$ მკაცრად დადებითი. ანუ მივიღეთ ურისკო მოგება, რაც ეწინააღმდეგობა ამ ბაზარზე

არბიტრაჟის არსებობის შეუძლებლობის დაშვებას. ამიტომ უტოლობა $C(K_1) > C(K_2)$ აღმოჩნდა მცდარი. მაშასადამე $C(K_1) \le C(K_2)$.

5) ა) თუ $C > S$, მაშინ შეგვიძლია გავყიდოთ ყიდვის ოფციონი C ფასად და ვიყიდოთ აქცია S ფასად. ოფციონის T მომენტში აღსრულების შემთხვევაში ჩვენ ვალდებული ვიქნებით გადაუხადოთ ოფციონის მფლობელს $\max(S_T - K, 0)$ თანხა, რომელიც, ცხადია, T მომენტში აქციის ფასზე ნაკლებია. ამიტომ, ჩვენ შეგვიძლია ურისკოდ მოვიგოთ $C - S + S_T - \max(S_T - K, 0)$ -ის ტოლი თანხა და არბიტრაჟის არარსებობის დაშვების გამო ვიღებთ, რომ $C \le S$.

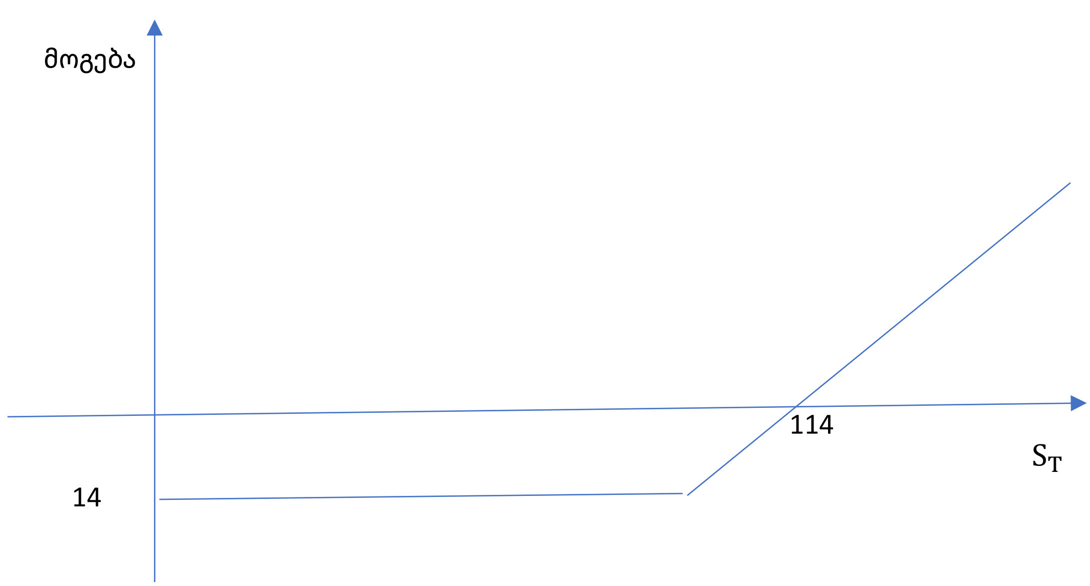
ბ) თუ ყიდვის ოფციონის გაყიდვით მივიღებთ $\frac{K}{r+1}$ -ზე მეტს, მაშინ $\frac{K}{r+1}$ თანხის საბანკო ანგარიშზე დადების შემდეგ T მომენტში მივიღებთ K -ს ტოლ თანხას, რომელიც საკმარისი იქნება ოფციონის მფლობელის გასასტუმრებლად ოფციონის T მომენტში განხორციელების შემთხვევაში და ურისკოდ მივიღებთ დადებით თანხას.

6) ოფციონის აღსრულების მომენტში ერთი აქციისა და ერთი გაყიდვის ოფციონის ყიდვით შედგენილი პორტფელის მოგება ტოლი იქნება

$f(S_T) = \max(\mathrm{K} - \mathrm{S_T}, 0) + S_T - S - C = \max(100 - \mathrm{S_T}, 0) + S_T - 110 - 4$ სიდიდის, საიდანაც

$$f(S_T) = \begin{cases} -14\,, & \text{თუ} \quad \mathrm{S_T} \le 100\,, \\ S_T - 114, & \text{თუ} \quad \mathrm{S_T} > 100. \end{cases}$$

გრაფიკულად მოგების ფუნქცია შემდეგნაირად გამოიყურება

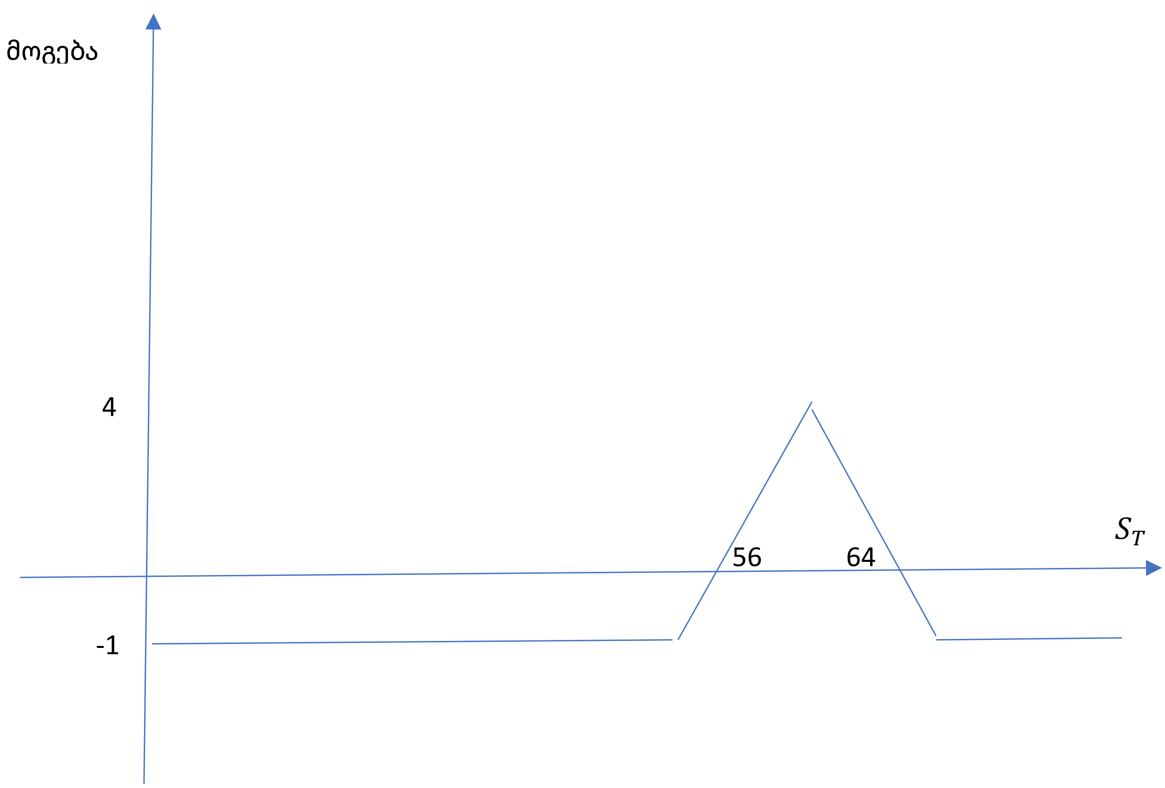


7) ამ პორტფელის მოგება ოფციონის აღსრულების მომენტში ტოლი იქნება

$f(S_T) = \quad \max(S_T - 55\,, 0) + \ \max(S_T - 65\,, 0) - 2\max(S_T - 60, 0) - 10 - 5 + 14$ სიდიდის, საიდანაც შემთხვევების განხილვის შემდეგ ვიღებთ, რომ

$$f(S_T) = \begin{cases} -1, \ \text{თუ} \quad S_T \le \ 55 \text{ ან } \ S_T > 65, \\ S_T - \ 56, \quad \text{თუ} \ \ 55 < S_T \le \ 60, \\ 64 - S_T, \quad \text{თუ} \ \ 60 < \ S_T \le 65. \end{cases}$$

მოგების ფუნქციის გრაფიკს შემდეგი სახე აქვს



8) ამ ამოცანის ამოხსნა უფრო ზოგად შემთხვევაში შეგიძლიათ ნახოთ ფინანსური მათემატიკის მესამე ნაწილის ბოლოს, დამატებაში.

დავუშვათ, რომ

$$P + S < C + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{r+1}}.$$

შევადგინოთ შემდეგი პორტფელი, რომელიც მოგვცემს ურისკო მოგების საშუალებას: გავყიდოთ ყიდვის ოფციონი, ვისესხოთ $P + S - C$ თანხა და მიღებული $P + S$ თანხით ვიყიდოთ აქცია და გაყიდვის ოფციონი. T მომენტისთვის დასაბრუნებელი გვექნება $(P + S - C)(1 + r)$ თანხა, რომელიც დაშვების თანახმად K -ზე ნაკლებია.

არჩეული სტრატეგია ოფციონის აღსრულების მომენტში მოგვცემს K -ს ტოლ მოგებას, რადგან

$$S_T + \max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) = K$$

S_T--ს ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს.

$(P + S - C)(1 + r)$ -ს ტოლი ვალის გადახდის შემდეგ გვრჩება ურისკო მოგება

$K - (P + S - C)(1 + r)$, რომელიც მკაცრად დადებითია ჩვენი დაშვების გამო.

პირიქით, ვთქვათ

$$P + S > C + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{r+1}}.$$

ამ შემთხვევაში ვირჩევთ შემდეგ სტრატეგიას: ვსესხულობთ ერთ აქციას და მისი მყისიერად S ფასად გაყიდვის შემდეგ ვიძენთ ყიდვის ოფციონს და ვყიდით გაყიდვის ოფციონს. დარჩენილ $P + S - C$ თანხას ვდებთ საბანკო ანგარიშზე, რომელიც ოფციონის აღსრულების მომენტში მოგვცემს $(P + S - C)(1 + r)$ თანხას $K -$ ზე მეტს ჩვენი დაშვების თანახმად.

ამიტომ ჩვენი სტრატეგია ოფციონების აღსრულების შემდეგ მოგვცემს მოგებას

$\max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) + (P + S - C)(1 + r)$,

რომელიც ყოველთვის მეტი იქნება S_T -ზე, რადგან

$$\max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) = S_T - K$$

აქციის ნებისმიერი კურსისთვის და

$$(P + S - C)(1 + r) > K.$$

ამიტომ ნასესხები აქციის დაბრუნების შემდეგ დაგვრჩება ურისკო მოგება.

9) გამომდინარეობს ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულიდან (იხ. ამოცანა 8), რადგან ყიდვის და გაყიდვის ოფციონების ფასები დადებითი სიდიდეებია.

10) დაუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ

$$C(2) > \frac{C(1) + C(3)}{2}.$$

შევადგინოთ შემდეგი პორტფელი: ვიყიდოთ $K(1)$ და $K(3)$ შეთანხმების ფასის მქონე თითო ყიდვის ოფციონი და გავყიდოთ ორი ყიდვის ოფციონი $K(2)$ -ის ტოლი შეთანხმების ფასით. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ $K(1) < K(3)$. ცხადია $K(2)$ მოთავსდება $K(1)$-სა და $K(3)$ -ს შორის, $K(1) < K(2) < K(3)$. დაშვების თანახმად ამ პორტფელის საწყისი კაპიტალი დადებითია

$$2C(2) - C(1) - C(3) > 0.$$

ოფციონების აღსრულების მომენტში ამ პორტფელის შესაბამისი მოგება

$$M_T = \max(S_T - K(1), 0) + \max(S_T - K(3), 0) - 2\max\left(S_T - \frac{K(1)+K(3)}{2}, 0\right)$$

იქნება არაუარყოფითი, რადგან

$$M_T = \begin{cases} 0, \text{ თუ } \mathrm{S_T} \leq K(1) \text{ ან } \mathrm{S_T} > K(3), \\ K(3) - \mathrm{S_T}, \text{ თუ } K(2) < \mathrm{S_T} \leq K(3), \\ \mathrm{S_T} - K(1), \text{ თუ } K(1) < \mathrm{S_T} \leq K(2). \end{cases}$$

ამიტომ, ეს პორტფელი გვაძლევს ურისკო მოგების შესაძლებლობას, რაც ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება არ არის სწორი.