ფორმალური გამოყვანა

დამტკიცება მათემატიკის, როგორც მეცნიერების, განუყოფელი ნაწილია. მათემატიკური დებულება არ მიიჩნევა სწორად, სანამ მისი გამართული დამტკიცება არ არსებობს. დამტკიცებულ დებულებებს **თეორემებს** ვუწოდებთ ხოლმე და მათი სისწორე ეჭვქვეშ არ დგას. თუ დებულება თეორემაა, მისი გამოყენება უკვე ნებადართულია სხვა დებულებების დასასაბუთებლად – ანუ დასამტკიცებლად. დაუსაბუთებელ, მაგრამ **სავარაუდოდ** ჭეშმარიტ დებულებას ხშირად **ჰიპოთეზას** უწოდებენ. თუკი მათემატიკის ენაზე დასმულია შეკითხვა, რომლის არც დადებითი და არც უარყოფითი პასუხის დამტკიცება არ არსებობს, ასეთ შეკითხვას **ღია პრობლემას** უწოდებენ ხოლმე. მკვლევარი მათემატიკოსის ერთ-ერთი ძირითადი საქმიანობა სწორედ ღია პრობლემების გადაჭრა, ანუ ჰიპოთეზების მართებულობის ან არამართებულობის დამტკიცებების პოვნა და ჩამოყალიბებაა.

მათემატიკაში უამრავი ღია პრობლემაა, რომელთაგან ზოგიერთი ათწლეულებს, ზოგი კი საუკუნეებს ითვლის – ზოგი კი მხოლოდ რამდენიმე მათემატიკოსს „აწუხებს“. ამ ღია პრობლემების გარკვეული ნაწილი საკმაოდ მარტივ ენაზე ყალიბდება. აი, მაგალითად[1]:

გოლდბახის ჰიპოთეზა: ნებისმიერი 2-ზე დიდი ლუწი ნატურალური რიცხვი შეიძლება დაიშალოს ორი მარტივი რიცხვის ჯამად.

ამ ჰიპოთეზის ჭეშმარიტობის თითქმის ყველა მათემატიკოსს **სჯერა**, თუმცა მისი **დამტკიცება** ჯერ არ არსებობს, ამიტომაც არცერთ მათემატიკოსს არ სჯერა, რომ ის **თეორემაა**. გოლდბახის ჰიპოთეზა გადამოწმებულია ყველა ლუწი რიცხვისათვის 4×10^{18}-მდე (ოთხჯერ მილიარდჯერ მილიარდი). ჯერ-ჯერობით თითოეული მათგანი მართლაც დაიშალა ორი მარტივი რიცხვის ჯამად, მაგრამ ვინ იცის, იქნებ რომელიმე 20-ნიშნა ლუწი რიცხვი უცებ აღარ დაიშალოს? თუ ასეთ რიცხვს იპოვით და იმასაც მკაცრად დაასაბუთებთ, რომ ის ორი მარტივი რიცხვის ჯამად არ იშლება, მსოფლიო დიდება გარანტირებული გაქვთ! გოლდბახის ჰიპოთეზის უკუსაგდებად კონკრეტული კონტრმაგალითის პოვნა აუცილებელი არ არის – მაგალითისთვის, რომ აღმოჩენილიყო, რომ მარტივი რიცხვების რაოდენობა სასრულია, ამით დავრწმუნდებოდით, რომ ორი მათგანის ჯამით ყველა ლუწი

[1] კიდევ ერთი ასეთი ცნობილი და ძველი ჰიპოთეზა – ე.წ. ფერმას დიდი თეორემა – ასევე მარტივად ყალიბდება: **არცერთი $n>2$ ნატურალური რიცხვისათვის არ მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები a,b,c რომ შესრულდეს ტოლობა $a^n+b^n=c^n$**. ეს ჰიპოთეზა საუკუნეების განმავლობაში უძლებდა მსოფლიოს საუკეთესო მათემატიკოსების „შეტევას“, სანამ 1994 წელს მას ბრიტანელი მეცნიერი, ენდრიუ უაილზი (Andrew Wiles) გადაჭრიდა.

არ მიიღება, ვინაიდან ლუწი რიცხვების სიდიდე განუხრელად იზრდება – მათი რაოდენობა უსასრულოა.

უკუგდების ეს გზა, სამწუხაროდ თუ საბედნიეროდ, დახშულია. ჯერ კიდევ ევკლიდემ[2] დაასაბუთა, თავის „საწყისებში“ 2 300 წლის წინ, რომ მარტივი რიცხვების რაოდენობა უსასრულოა. ეს დამტკიცება შეიძლება ნანახიც გაქვთ, მაგრამ იმდენად მოხდენილია, რომ ღირს მისი სქემატური გახსენება.

დავუშვათ, მარტივი რიცხვების რაოდენობა სასრულია. მოდით **ყველა** ამ რიცხვის ნამრავლი აღვნიშნოთ $\boldsymbol{N}$-ით. რა შეიძლება ითქვას რიცხვზე $\boldsymbol{N+1}$? ცხადია, ის უნაშთოდ არ გაიყოფა ჩვენი მარტივი რიცხვებიდან არცერთზე, არა? სინამდვილეში, ზუსტად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველ მარტივ რიცხვზე გაყოფისას ნაშთად 1 დაგვრჩება. ამასთან ისიც ცხადია[3], რომ **რაიმე** მარტივ რიცხვზე $\boldsymbol{N+1}$ აუცილებლად უნდა იყოფოდეს. მივიღეთ წინააღმდეგობა – გამოდის, რომ მარტივი რიცხვების რაოდენობა სასრული არ ყოფილა.

გოლდბახის ჰიპოთეზა არ არის შეტანილი Clay Mathematical Institute-ის ღია პრობლემების სიაში, რომელთაგან თითოეულის გადაჭრისათვის მილიონ დოლარიანი პრიზია დაწესებული, თუმცა ამ სიაში მესამე წევრად არის შეტანილი ე.წ. **P-NP პრობლემა**, რომელიც მჭიდრო კავშირშია ჩვენს თემატიკასთან – დებულებათა ლოგიკის ფორმალურ აპარატთან. ძალიან უხეშად რომ ვთქვათ, P-NP პრობლემა გვეკითხება, რამდენად სწრაფად შეუძლია კომპიუტერს ფორმალური დამტკიცებების მოძებნა სწორედ იმ სიმბოლურ ფორმაში, რომელსაც ჩვენ დეტალურად განვიხილავთ ამ თემის ფარგლებში.

[2] ევკლიდე ძველი ბერძენი მათემატიკოსია. მისი თხზულება „საწყისები“ კაცობრიობის აზროვნების ისტორიის ერთ-ერთი გამორჩეული შედევრია. ამაზე ისიც მეტყველებს, რომ – ბიბლიის შემდეგ – ეს ყველაზე ხშირადგამოცემული წიგნია დედამიწაზე. სწორედ „საწყისებში“ გვხვდება პირველად დამტკიცების ცნების სისტემატური და გასაოცრად მასშტაბური გამოყენება იმდროინდელი მათემატიკური ცოდნის მოსაწესრიგებლად. ეს წიგნი, თავისი **აგებულებით**, ეტალონი იყო მრავალი სხვა ფილოსოფიური თუ საბუნებისმეტყველო ნაშრომისთვის. მისი მეთოდიკა დღემდე გვევლინება მეცნიერებათა ორგანიზების ხერხემლად. ამას გარდა, ევკლიდესთან გვხვდება ბევრი ცნობილი და სასარგებლო, გეომეტრიული თუ არითმეტიკული დებულება და პროცედურა, როგორებიცაა პითაგორას თეორემა, უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის ალგორითმი, არითმეტიკის ძირითადი თეორემა და სხვ. 2000 წელზე მეტი ხნის განმავლობაში „საწყისები“ მათემატიკის შეუცვლელი სახელმძღვანელო იყო. მთელი ეს „მემკვიდრეობა“ დამტკიცების ცნებას ეფუძნება, თავად თხზულება „საწყისებიც“ ამ მტკიცე ქვითკირითაა შეკრული.

[3] ამ „ცხადიას“ თუ „რატომებით“ ჯიუტად ჩავეძიებით, შანსი გვაქვს, **არითმეტიკის ძირითადი თეორემა** და **უსასრულო დაშვების (დაღმასვლის) მეთოდი** აღმოვაჩინოთ, რომლებიც პირველად ასევე ევკლიდეს „საწყისებში“ გვხვდება.

რა არის დამტკიცება?

ჩვეულებრივ, დამტკიცებას ვუწოდებთ წინადადებების თანამიმდევრობით აგებულ ისეთ მსჯელობას, რომელშიც ყოველი შემდეგი წინადადება ლოგიკურად გამომდინარეობს წინა წინადადებებიდან.

დამტკიცება ჯაჭვივითაა – მისი შემდეგი რგოლები წინა რგოლებს ებმის.

დამტკიცებაში საწყისი დებულებებიდან – დაშვებებიდან – ნაბიჯ-ნაბიჯ მივდივართ საბოლოო დებულებამდე – დასკვნამდე. დამტკიცების ამ ელემენტებისთვის მალე საგანგებო ტერმინებს შემოვიღებთ, თუმცა მანამდე ორიოდე სიტყვა ვთქვათ საერთოდ ტერმინოლოგიური აპარატისა და ენის მკაცრი წესების საჭიროების შესახებ.

ხშირად მათემატიკურ დამტკიცებაში განსაკუთრებულ ტერმინებთან და სიმბოლურ აღნიშვნებთან ერთად ჩვეულებრივ, ე.წ. ბუნებრივ ენასაც ვიყენებთ. თუმცა, რაც უფრო რთულია დამტკიცება და მასში მონაწილე ცნებები, მით უფრო მნიშვნელოვანი ხდება, რომ სიტყვები და წინადადებები რაც შეიძლება ზუსტი მნიშვნელობით გამოვიყენოთ. ბუნებრივი ენა ასეთ შემთხვევებში შეიძლება აღარ გამოგვადგეს, რადგან ენაში სიტყვებს ხშირად არამკაფიო, ორაზროვანი და ხატოვანი მნიშვნელობები აქვს. ეს მოქნილობა და მრავამლმნიშვნელიანობა ბუნებრივი ენის სიმდიდრეა, თუმცა ეს სიმდიდრე გადაულახავ დაბრკოლებად შეიძლება იქცეს, თუკი სასაუბრო თემა თუ გამოსათქმელი აზრი მაქსიმალურ სიზუსტეს მოითხოვს. ამიტომაც, მეცნიერებაში, მედიცინასა და იურისპრუდენციაში, სადაც სიზუსტე განსაკუთრებით ფასობს, ხშირად ენის საკუთარი, სპეციფიკური წესები და შეთანხმებები მოქმედებს[4].

ეს განსაკუთრებით თვალსაჩინოა მათემატიკის შემთხვევაში. მათემატიკური ენა აბსოლუტურად ზუსტი და არაორაზროვანი უნდა იყოს, რომ თავისი ფუნქცია სათანადოდ შეასრულოს. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ მათემატიკოსებიც ბუნებრივ ენას იყენებენ მათემატიკაზე საუბრისას, ყოველთვის იგულისხმება, რომ საჭიროების შემთხვევაში ყველაფერი გადათარგმნადია ეგრეთ წოდებულ ფორმალურ ენაზე, სადაც გაუგებრობებისა და ორაზროვნების ადგილი აღარ არის. ასევეა მათემატიკურ დამტკიცებაშიც – ხშირად მათემატიკოსები, თუნდაც ფორმალური დამტკიცების ჩამოყალიბებისას, ყველა ლოგიკურ ნაბიჯს არ აზუსტებენ, რადგან ეს დამტკიცების იდეის აღქმასა და გაგებას ხელს შეუშლიდა, მაგრამ ყოველთვის იგულისხმება, რომ საჭიროების შემთხვევაში, დამტკიცების მთელი ჯაჭვის აღდგენაა შესაძლებელი ისე, რომ ყოველი

[4] შემთხვევითი არაა, რომ, მაგალითად, იურიდიული შინაარსის ტექსტი – კანონი, ან ხელშეკრულება – თუნდაც ის მშობლიურ ენაზე იყოს დაწერილი, ხშირად რთული აღსაქმელია არასპეციალისტისთვის.

შემდეგი ფორმალური წინადადება ცხადად და ლოგიკურად გამომდინარეობდეს წინა წინადადებებიდან.

ის ენა, რომელსაც დღეს მათემატიკოსების აბსოლუტური უმრავლესობა იყენებს ზუსტი მათემატიკური მსჯელობისთვის, სულ რაღაც 100-150 წლის წინ შეიქმნა. ერთი მხრივ, გოტლობ ფრეგესა და მეორე მხრივ, გეორგ კანტორის ფუძემდებლური ძალისხმევით. საუბარია სიმრავლეთა თეორიის პირველი რიგის ფორმალურ აპარატზე.

ჩვენი ამოცანა იქნება, დეტალურად გავეცნოთ ამ აპარატის მხოლოდ მცირე ნაწილს, რომელიც დებულებათა შესახებ მსჯელობას შეეხება.

ამისათვის მოგვიწევს პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს: რა არის ფორმალური ენა? რას ნიშნავს ფორმალური გამოყვანა?

ამ შეკითხვებს ჯერ ზოგადად ვუპასუხებთ, შემდეგ კი საკუთრივ დებულებათა ლოგიკის ფარგლებში დავაკონკრეტებთ.

რა არის ფორმალური გამოყვანა?

ლოგიკასა და მათემატიკაში **ფორმალური დამტკიცება** ეწოდება ზუსტ ენაზე ჩაწერილი წინადადებების სასრულ მიმდევრობას, რომელთაგან თითოეული ან საწყისი დაშვებაა, ან წინასწარ მიღებული აქსიომაა, ან მიიღება მიმდევრობის წინა წევრებიდან წინასწარ დაფიქსირებული ფორმალური წესების (გამოყვანის წესების) საშუალებით.

მსაზღვრელი „ფორმალური“ აქ იმას მიუთითებს, რომ დამტკიცებაში შემავალი წინადადებების შინაარსს ყურადღება არ ექცევა, მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ მათ აგებულებას, ანუ ფორმას. ამიტომ მნიშვნელოვანია, რომ წინადადებების აგებულება ასევე მკაფიოდ და არაორაზროვნად იყოს წარმოდგენილი. წინადადებების აგების წესებს ფორმალური გრამატიკა ეწოდება, ხოლო ამ გრამატიკის თანახმად აგებული წინადადებების ერთობლიობას – ფორმალური ენა.

მხოლოდ ფორმის საფუძველზე უნდა წყდებოდეს, ცალსახად და მკაფიოდ, წარმოადგენს თუ არა კონკრეტული წინადადება მოცემული გამოყვანის წესის შედეგს. ამრიგად, თითოეული გამოყვანის წესი მთლიანად აგებულებას ეფუძნება – გამოყვანის წესები სინტაქსურია.

გამოყვანის წესის ზოგადი ფორმა ასეთია: „ამა და ამ აგებულებების წინადადებებიდან შეგვიძლია დავასკვნათ აი ასეთი აგებულების წინადადება“.

თუ დაფიქსირებულია ფორმალური ენა და გამოყვანის წესები, უკვე შესაძლებელია ამ ფორმალური ენის წინადადებების ისეთი მიმდევრობების აგება, რომლებშიც ყოველი

შემდეგი წევრი მიღებულია წინა წევრებიდან გამოყვანის წესების გამოყენებით. ასეთ მიმდევრობას **გამოყვანა** ეწოდება. მათემატიკური დამტკიცება გამოყვანის კერძო სახეა, როდესაც ფორმალური ენა ლოგიკური მაკავშირებლებით აიგება და გამოყვანის წესებიც ამ ლოგიკურ აგებულებას ეფუძნება. თუმცა, გამოყვანა უფრო ზოგადი ცნებაა და აქ შემოტანილი ტერმინების უკეთ გასაშინაარსებლად შეგვიძლია ჯერ გამოყვანის უფრო მარტივი მაგალითი განვიხილოთ.

მაგალითი 2.1: აღვწეროთ მარტივი ფორმალური სისტემა. ამისათვის პირველ რიგში საჭიროა ჩამოვაყალიბოთ **ფორმალური ენა,** ანუ ტერმების[5] მკაფიო ერთობლიობა.

ფორმალური ენის ელემენტებია **ანბანი** (*რა სიმბოლოების* გამოყენებით შეიძლება ტერმების აგება) და **გრამატიკა** (*როგორი აგებულების* ტერმებია დასაშვები).

ანბანი შედგებოდეს სულ სამი სიმბოლოსგან: სიმბოლო A, სიმბოლო × და სიმბოლო I. სიმრავლური ენის გამოყენებით შეგვეძლო გვეთქვა, რომ ჩვენი ანბანია სიმრავლე {A, ×, I}.

გრამატიკა კიდევ უფრო მარტივი ავიღოთ – მოცემული ანბანის სიმბოლოების *ნებისმიერი* სასრული მიმდევრობა დაშვებული იყოს, ოღონდ სხვა არაფერი არ იყოს დაშვებული.

შესაბამისად, ამ ენის ტერმები იქნება A, ×, I, AA, AA××AI, ××I××I და ა.შ. (მძიმეებით ერთმანეთისგან გამოყოფილია ცალკეული ტერმები), თუმცა ამ ენის ტერმი არ არის, მაგალითად ABBA ან A!)9.

ამით განსაზღვრულია **ფორმალური ენა**. გადავიდეთ **გამოყვანის წესების** განსაზღვრაზე.

გამოყვანის წესები სულ სამია და ასე გამოიყურება:

წესი 1. ტერმში შემავალი ერთი A სიმბოლო შეგვიძლია შევცვალოთ AA მიმდევრობით, ხოლო სხვა ყველაფერი იგივე დავტოვოთ.

წესი 2. ტერმში შემავალი ერთი x სიმბოლო შეგვიძლია შევცვალოთ IxI მიმდევრობით, ხოლო სხვა ყველაფერი იგივე დავტოვოთ.

წესი 3. ტერმში შემავალი AA მიმდევრობა შეგვიძლია შევცვალოთ AxA მიმდევრობით, ხოლო სხვა ყველაფერი იგივე დავტოვოთ.

თვალსაჩინოებისთვის, იგივე წესები მოკლედ ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

წ1. A ⇒ AA

წ2. x ⇒ IxI

წ3. AA ⇒ AxA

[5] ტერმი (term) - ტექნიკური ტერმინია და ნიშნავს გარკვეული წესით აგებულ სიმბოლოთა მიმდევრობას, უხეშად რომ ვთქვათ – გარკვეული ანბანის მიხედვით დაწერილ *სიტყვას*.

ამით **გამოყვანის სისტემა** დაფიქსირებულია. როგორ შეიძლება ამ სისტემის გამოყენებით ვიმოქმედოთ? მაგალითად, თუ დავიწყებთ ტერმით ×××, მეორე წესის გამოყენებით, შეგვიძლია მივიღოთ ×|×|×. მაშასადამე, ××× ⇒ ×|×|× ამ სისტემაში სწორი გამოყვანა იქნება. იგივე წესის გამოყენებით შეგვეძლო სხვაგვარადაც გვემოქმედა და |×|×× მიგვეღო, ანუ ××× ⇒ |×|×× ასევე სწორი გამოყვანაა.

? კიდევ რა შეგვეძლო მიგვეღო ××× ტერმიდან მე-2 წესით? რომელიმე სხვა წესით ხომ არ შეგვეძლო გვემოქმედა?

გამოყვანების ჩაწერისას მოსახერხებელია ხოლმე გარკვეული შეთანხმებების შემოღება, რომ მათთან მუშაობა გაგვიმარტივდეს. ასეთი შეთანხმებები რიგ შემთხვევებში აუცილებელია, რომ სიზუსტე დავიცვათ, ზოგჯერ კი უბრალოდ თვალსაჩინოებას ემსახურება.

ამ კონკრეტულ შემთხვევაში შევთანხმდეთ, რომ „გამოყვანის ისარს“ თავზე დავაწეროთ, თუ რომელი წესის მოქმედებას გამოხატავს, ხაზი გავუსვათ მის მარცხნივ მყოფ ტერმში იმ ადგილს, რომელზეც „წესმა იმოქმედა“, ხოლო მის მარჯვნივ მყოფ ტერმში კი გავაფერადოთ ის ნაწილი, რომელიც მისი მოქმედების შედეგია (ეს უკანასკნელი აუცილებელი არ არის, რადგან წესისა და მისი მოქმედების ადგილის მითითებით ცალსახაა, თუ რა იქნება შედეგი. თუმცა, მხოლოდ წესის მითითებით, როგორც ზემოთ განხილულ მაგალითზე ვიხილეთ, შედეგი ცალსახა არ იქნებოდა). აი ამ შეთანხმებებით ჩაწერილი ყველა შესაძლო ერთნაბიჯიანი გამოყვანა ××× საწყისით ჩვენს სისტემაში:

$$\underline{\times}\times\times \overset{2}{\Rightarrow} |\times|\times\times \qquad \times\underline{\times}\times \overset{2}{\Rightarrow} \times|\times|\times \qquad \times\times\underline{\times} \overset{2}{\Rightarrow} \times\times|\times|$$

რაღა თქმა უნდა, გამოყვანების მთელი ხიბლი იმაშია, რომ შეგვიძლია ერთი ნაბიჯით არ შემოვიფარგლოთ. აი მაგალითად:

$$\times\times\underline{\times} \overset{2}{\Rightarrow} \times\times|\times| \qquad \times\times|\underline{\times}| \overset{2}{\Rightarrow} \times\times||\times|| \qquad \underline{\times}\times||\times|| \overset{2}{\Rightarrow} |\times|\times||\times|| \qquad |\underline{\times}|\times||\times|| \overset{2}{\Rightarrow} ||\times||\times||\times||$$

საიდანაც ჩანს, რომ ჩვენს სისტემაში ||×||×||×|| ტერმი გამომდინარეობს (გამოიყვანება) ××× ტერმიდან.

სავარჯიშოები:

2.1.1 რომელი ტერმები გამოიყვანება ამ სისტემის მეშვეობით × ტერმიდან? შეეცადეთ ამომწურავად აღწეროთ ყველა ის ტერმი, რომელიც × ტერმიდან გამოიყვანება.

2.1.2 ზედიზედ k ცალი | სიმბოლოს მიმდევრობა შემოკლებით ასე აღვნიშნოთ: $|^k$ რა უმოკლესი სიგრძის[6] ტერმებიდან გამომდინარეობს ტერმი $|^7\times|^9\times|^6$?

[6] ტერმის **სიგრძე** მასში შემავალი სიმბოლოების რაოდენობაა.

2.1.3 რა ტერმები შეიძლება გამოვიყვანოთ ××× ტერმიდან? შეეცადეთ აღწეროთ რაც შეიძლება მეტი ასეთი ტერმი.
2.1.4 რომელი ტერმები გამომდინარეობს ამ სისტემის მეშვეობით A ტერმიდან, თუკი პირველ წესს მხოლოდ ერთხელ გამოვიყენებთ? თუკი მესამე წესს მხოლოდ ერთხელ გამოვიყენებთ? თუკი მეორე წესს საერთოდ არ გამოვიყენებთ? თითოეულ შემთხვევაში შეეცადეთ აღწეროთ რაც შეიძლება მეტი ასეთი ტერმი.
2.1.5 რომელი ტერმები გამომდინარეობს ამ სისტემის მეშვეობით A ტერმიდან?
2.1.6 გამოიყვანება თუ არა ამ სისტემის მეშვეობით ტერმიდან AA×IIIA× შემდეგი ტერმები:
AAIII×IIIIAAAIIII××IIIIAAAAAAIIIII×IIIII
AIII×IIIAAAII×IIAAAAIIIIII×IIIIIIAAAAII×IIIIIAAAA×AA×AII×IIAA×?

გამოყვანის ასეთი სისტემები, სხვადასხვა გარეგნული ფორმით, უხვად გვხვდება მათემატიკაში, კომპიუტერულ მეცნიერებებში და ლინგვისტიკაში. მათი ზოგადი სახელია **გადაწერის სისტემები (Rewriting Systems).** განსაკუთრებით შთამბეჭდავ შედეგებს გვაძლევს და ბევრ სხვადასხვა სფეროში ჰპოვებს გამოყენებას ასეთი სისტემების ნაირსახეობები, რომლებიც ლინდენმაიერის სისტემების (L-system, Lindenmayer system) და უჯრედული ავტომატების (Cellular automata) სახელებითაა ცნობილი. ჩვენ ამ სისტემებს დეტალურად არ განვიხილავთ, მაგრამ დაინტერესებული მკითხველი ადვილად იპოვის ინტერნეტში შესაბამის ინფორმაციას. მაგალითად, ერთ-ერთი ყველაზე პოპულარული და კარგად შესწავლილი უჯრედული ავტომატა ცნობილი მათემატიკოსის, ჯონ კონვეის (John Conway) გამოგონილია და მას „სიცოცხლის თამაში“ ჰქვია. შეგიძლიათ „დაგუგლოთ“ ფრაზა Conway's Game of Life და სანამ რომელიმე მოძიებულ ბმულზე შეხვიდოდეთ, კარგად დააკვირდით თვითონ ძიების შედეგების გვერდს – წესით რაღაც „სიურპრიზი“ უნდა ჰქონდეს გუგლს „შემონახული“ სპეციალურად ამ ფრაზის მაძიებლებისათვის.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ასეთი სისტემა:

მაგალითი 2.2: ამ სისტემის აღწერასაც ვიწყებთ ფორმალური ენის აღწერით.

ანბანი შედგებოდეს ორი სიმბოლოსგან: $\{a, b\}$.

გრამატიკა კვლავ, სიმბოლოების *ნებისმიერი* სასრული მიმდევრობა დაშვებული იყოს.

გამოყვანის წესები სულ ოთხია:

წ1. $ba \Rightarrow aaab$	**წ3.** $bb \Rightarrow aaaa$
წ2. $ab \Rightarrow b$	**წ4.** $aa \Rightarrow a$

სავარჯიშო 2.2:

დავუშვათ, $\boldsymbol{x}$ ამ ენის ნებისმიერი ტერმია. დაასაბუთეთ, რომ $\boldsymbol{x}$-იდან გამოიყვანება ან a ან b, მაგრამ არა ორივე. რაზეა დამოკიდებული, თუ რომელი მათგანი გამოიყვანება?

ბოლოს კი გავეცნოთ კიდევ ერთ მარტივ გამოყვანის სისტემას, რომელსაც უფრო არითმეტიკული ელფერი დაჰკრავს.

მაგალითი 2.3:

ანბანი შედგება სამი სიმბოლოსგან: $\{e, g, u\}$.

გრამატიკა დაშვებულია მხოლოდ ის ტერმები, რომლებშიც u ერთხელ შედის.

ამრიგად, ჩვენი ენის ტიპიური ტერმი იქნება, მაგალითად $geegue$, მაგრამ არა $guueegu$

გადავიდეთ **გამოყვანის წესების** განსაზღვრაზე.

გამოყვანის წესები სულ ორია და ასე გამოიყურება ($\boldsymbol{x}$ და $\boldsymbol{y}$ ნებისმიერ ტერმებს აღნიშნავს):

წ1. $\boldsymbol{x}g\boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x}ge\boldsymbol{y}e$

წ2. $\boldsymbol{x}g\boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x}eg\boldsymbol{y}e$

სავარჯიშო 2.3:

სრულად აღწერეთ, რომელი ტერმები გამოიყვანება ტერმიდან $egeuee$.